

Manual de Cálculo

en una y varias variables



Alfredo Sánchez Alberca
asalber@ceu.es
<https://aprendeconalf.es>

Índice de contenidos

Prefacio	7
Licencia	7
1 Geometría Analítica	9
1.1 Escalares y vectores	9
1.1.1 Escalares	9
1.1.2 Vectores	9
1.1.3 Representación de un vector	10
1.1.4 Vector a partir de dos puntos	10
1.1.5 Módulo de un vector	11
1.1.6 Vectores unitarios	12
1.1.7 Suma de vectores	13
1.1.8 Producto de un vector por un escalar	13
1.1.9 Expresión de un vector como combinación lineal de los vectores coordenados	14
1.1.10 Producto escalar	15
1.1.11 Vectores paralelos	16
1.1.12 Vectores ortogonales y ortonormales	16
1.2 Rectas	17
1.2.1 Ecuación vectorial de la recta	17
1.2.2 Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta	17
1.2.3 Ecuación punto-pendiente de una recta en el plano	18
1.2.4 Pendiente de una recta en el plano	19
1.3 Planos	19
1.3.1 Ecuación vectorial del plano en el espacio real	19
1.3.2 Ecuación escalar de un plano en el espacio	20
2 Funciones elementales	22
2.1 El concepto de función	22
2.1.1 ¿Qué es una función?	22
2.1.2 Formas de representar una función	22
2.2 Dominio e imagen de una función	24
2.2.1 Dominio de una función	24
2.2.2 Imagen de una función	25
2.3 Composición e inversa de una función	26
2.3.1 Composición de funciones	26

2.3.2	Inversa de una función	27
2.4	Crecimiento de una función	27
2.5	Extremos de una función	28
2.6	Concavidad de una función	29
2.7	Funciones periódicas	29
2.8	Funciones polinómicas	30
2.8.1	Propiedades de las funciones polinómicas	31
2.9	Funciones racionales	31
2.9.1	Propiedades de las funciones racionales	32
2.10	Funciones potenciales	32
2.10.1	Propiedades de las funciones potenciales	33
2.11	Funciones exponenciales	34
2.11.1	Propiedades de las funciones exponenciales	34
2.12	Funciones logarítmicas	35
2.12.1	Propiedades de las funciones logarítmicas	35
2.13	Funciones trigonométricas	36
2.13.1	Seno de un ángulo	36
2.13.2	Función seno	37
2.13.3	Propiedades de la función seno	38
2.13.4	Coseno de un ángulo	38
2.13.5	Función coseno	39
2.13.6	Propiedades de la función coseno	40
2.13.7	Tangente de un ángulo	40
2.13.8	Función tangente	41
2.13.9	Propiedades de la función tangente	42
2.13.10	Función arcoseno	42
2.13.11	Propiedades de la función arcoseno	43
2.13.12	Función arcocoseno	43
2.13.13	Propiedades de la función arcocoseno	44
2.13.14	Función arcotangente	44
2.13.15	Propiedades de la función arcotangente	45
2.13.16	Algunas relaciones trigonométricas	45
3	Límites y continuidad	46
3.1	El concepto de límite	46
3.1.1	Aproximación al concepto de límite	46
3.1.2	Límites laterales	46
3.1.3	Límites que no existen (I)	47
3.1.4	Límites que no existen (II)	48
3.1.5	Límites que no existen (III)	49
3.1.6	Límites que no existen (IV)	50
3.1.7	Límites en el infinito	51
3.1.8	Definición de límite	52
3.1.9	Definición de límite en el infinito	53

3.2	Álgebra de límites	53
3.2.1	Límites de las funciones elementales	54
3.3	Indeterminaciones y su resolución	54
3.3.1	Tipos de indeterminaciones	54
3.3.2	Resolución de una indeterminación de tipo cociente	55
3.3.3	Resolución de una indeterminación de tipo producto	58
3.3.4	Resolución de una indeterminación de tipo potencia	58
3.3.5	Resolución de una indeterminación de tipo diferencia	59
3.4	Asíntotas de una función	59
3.4.1	Asíntotas verticales	60
3.4.2	Asíntotas horizontales	60
3.4.3	Asíntotas oblicuas	61
3.5	Continuidad	62
3.6	Tipos de discontinuidades	63
3.6.1	Discontinuidad evitable	63
3.6.2	Discontinuidad de 1ª especie de salto finito	64
3.6.3	Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito	65
3.6.4	Discontinuidad de 2ª especie	66
4	Cálculo diferencial en una variable	68
4.1	El concepto de derivada	68
4.1.1	Tasa de variación media	68
4.1.2	Interpretación geométrica de la tasa de variación media	69
4.1.3	Tasa de variación instantánea	70
4.1.4	Interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea	71
4.2	Interpretación cinemática de la derivada	72
4.2.1	Movimiento rectilíneo	72
4.2.2	Generalización al movimiento curvilíneo	73
4.3	Recta tangente a una trayectoria	75
4.3.1	Recta tangente a una trayectoria en el plano	75
4.3.2	Recta normal a una trayectoria en el plano	77
4.3.3	Rectas tangente y normal a una función	78
4.3.4	Recta tangente a una trayectoria en el espacio	79
4.4	Álgebra de derivadas	80
4.4.1	Propiedades de la derivada	80
4.5	Derivada de una función compuesta: La regla de la cadena	80
4.6	Derivada de la inversa de una función	81
4.7	Estudio del crecimiento de una función	82
4.8	Determinación de los extremos relativos de una función	83
4.9	Estudio de la concavidad de una función	84
4.10	Polinomios de Taylor	86
4.10.1	Aproximación de una función mediante un polinomio	86
4.10.2	Polinomio de Maclaurin de orden n	93
4.10.3	Polinomios de Maclaurin de funciones elementales	95

4.10.4	Resto de Taylor	95
5	Cálculo integral	96
5.1	Primitiva de una función	96
5.1.1	Integral indefinida de una función	96
5.1.2	Interpretación de la integral	97
5.1.3	Linealidad de la integral	97
5.2	Integrales inmediatas	97
5.3	Técnicas de integración	98
5.3.1	Integración por partes	98
5.3.2	Integración por reducción	99
5.3.3	Integración por cambio de variable	100
5.3.4	Integración de funciones racionales	100
5.3.5	Integración de funciones trigonométricas	102
5.4	Integral definida	104
5.4.1	Propiedades de la integral definida	105
5.5	Cálculo de áreas	106
5.5.1	Área delimitada por una función positiva y el eje de abscisas . . .	106
5.5.2	Área delimitada por una función negativa y el eje de abscisas . . .	107
5.5.3	Área delimitada por una función y el eje de abscisas	107
5.5.4	Área delimitada por dos funciones	108
6	Ecuaciones diferenciales ordinarias	110
6.1	Definición de las ecuaciones diferenciales ordinarias	110
6.1.1	Deducción de una ecuación diferencial	110
6.1.2	Solución de una ecuación diferencial ordinaria	111
6.1.3	Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	111
6.1.4	Existencia y unicidad de soluciones	113
6.2	E.D.O. de variables separables	114
6.3	E.D.O. homogéneas	115
6.4	E.D.O. lineales	117
6.4.1	Resolución de una E.D.O. Lineal	117
7	Cálculo diferencial en varias variables	120
7.1	Funciones vectoriales de una variable real	120
7.1.1	Representación gráfica de un campo vectorial	120
7.2	Derivada de un campo vectorial	121
7.2.1	Interpretación cinemática: movimiento curvilíneo	122
7.2.2	Recta tangente a una trayectoria	124
7.2.3	Recta normal a una trayectoria en el plano	126
7.2.4	Rectas tangente y normal a una función	127
7.2.5	Recta tangente a una trayectoria en el espacio	128
7.2.6	Plano normal a una trayectoria en el espacio	129

7.3	Funciones de varias variables	130
7.3.1	Gráfica de una función de dos variables	131
7.3.2	Conjunto de nivel de un campo escalar	134
7.3.3	Funciones parciales	135
7.4	Noción de derivada parcial	136
7.4.1	Variación de una función con respecto a una variable	136
7.4.2	Tasa de variación instantánea de un campo escalar con respecto a una variable	136
7.4.3	Interpretación geométrica de la derivada parcial	137
7.4.4	Derivada parcial	137
7.4.5	Cálculo de la derivada parcial	138
7.5	Vector gradiente	139
7.6	Composición de una trayectoria con un campo escalar	140
7.6.1	Regla de la cadena	140
7.7	Derivada direccional	141
7.7.1	Crecimiento de un campo escalar a partir del gradiente	142
7.8	Derivación implícita	143
7.8.1	Propiedad del gradiente	144
7.8.2	Rectas normal y tangente a una línea en el plano	145
7.8.3	Recta normal y plano tangente a una superficie	145
7.9	Derivadas parciales de segundo orden	146
7.10	Matriz hessiana	147
7.10.1	Igualdad de las derivadas cruzadas	148
7.11	Fórmula de Taylor	149
7.11.1	Aproximación lineal de un campo escalar	149
7.11.2	Aproximación cuadrática de un campo escalar	150
7.12	Extremos	151
7.12.1	Anulación del gradiente en los extremos	152
7.12.2	Puntos de silla	153
7.12.3	Determinación de los extremos de un campo escalar	154

Prefacio

¡Bienvenida/os al Manual de Cálculo!

Este manual está pensado para facilitar el aprendizaje del Cálculo a los alumnos de los primeros cursos de grado. En él se explican de manera sencilla los conceptos más importantes del Cálculo en una y varias variables, con multitud de ejemplos que facilitan su comprensión.

El manual está orientado principalmente a las Ciencias Biosanitarias y por ello la mayor parte de los ejemplos están aplicados a estas disciplinas. No obstante, los conceptos y los procedimientos de cálculo presentados son válidos para cualquier ámbito de aplicación.

Este libro se acompaña de una [colección de problemas resueltos](#).

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento – No comercial – Compartir bajo la misma licencia 3.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>.

Con esta licencia eres libre de:

- Copiar, distribuir y mostrar este trabajo.
- Realizar modificaciones de este trabajo.

Bajo las siguientes condiciones:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.

Estas condiciones pueden no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.

Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

1 Geometría Analítica

1.1 Escalares y vectores

1.1.1 Escalares

Algunos fenómenos de la naturaleza pueden describirse mediante un número referido a una unidad de medida.

Definición 1.1 (Escalar). Un *escalar* es un número que sirve para expresar una magnitud sin dirección.

Ejemplo 1.1. La estatura o el peso de una persona, la temperatura de un gas o el tiempo que tarda un móvil en recorrer una distancia.

Sin embargo, existen otros fenómenos que no pueden describirse adecuadamente mediante un escalar. Si, por ejemplo, un navegante quiere poner rumbo a puerto y sólo conoce de la intensidad del viento, no sabrá qué dirección tomar. La descripción del viento requiere dos elementos, su intensidad y su dirección.

1.1.2 Vectores

Definición 1.2 (Vector). Un *vector* es un número que sirve para expresar una magnitud y tiene asociada una dirección y un sentido.

Ejemplo 1.2. La velocidad de un móvil o la fuerza que se aplica sobre un objeto.

Geométricamente, un vector se representa mediante un segmento orientado, es decir, una flecha.

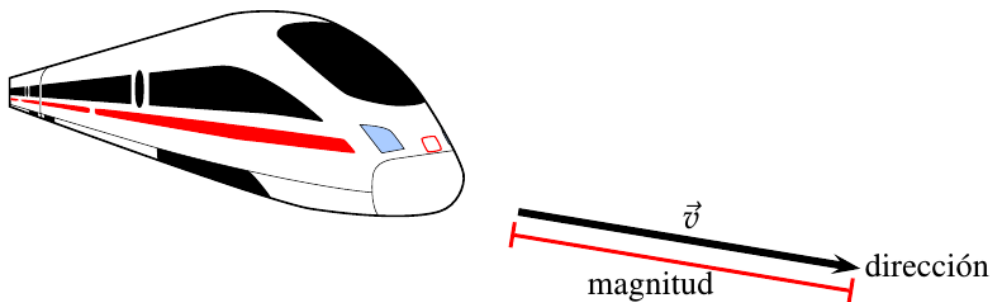


Figura 1.1: Representación gráfica de un vector

1.1.3 Representación de un vector

Un segmento orientado puede ubicarse en diferentes lugares dentro de un espacio cartesiano. Sin embargo, con independencia de donde esté situado, si la longitud y la dirección no varían, dicho segmento representará siempre el mismo vector.

Esto permite representar todos los vectores con un mismo origen, el origen en sistema de coordenadas cartesianas. Así, un vector queda determinado por las *coordenadas* de su extremo final en cualquier espacio euclideo.

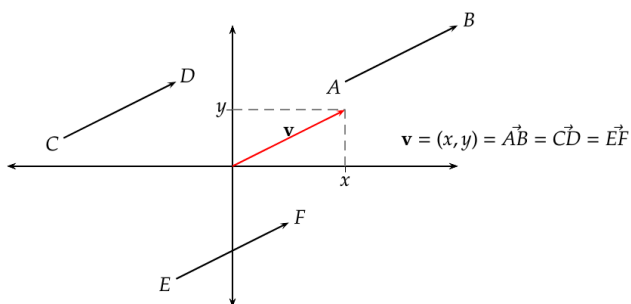


Figura 1.2: Coordenadas de un vector

1.1.4 Vector a partir de dos puntos

Dados dos puntos P y Q de un espacio cartesiano, el vector con origen en P y destino en Q tiene coordenadas $\vec{PQ} = Q - P$.

Sean los puntos $P = (2, 1)$ y $Q = (3, 4)$ del plano real $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\vec{PQ} = Q - P = (3, 4) - (2, 1) = (3 - 2, 4 - 1) = (1, 3).$$

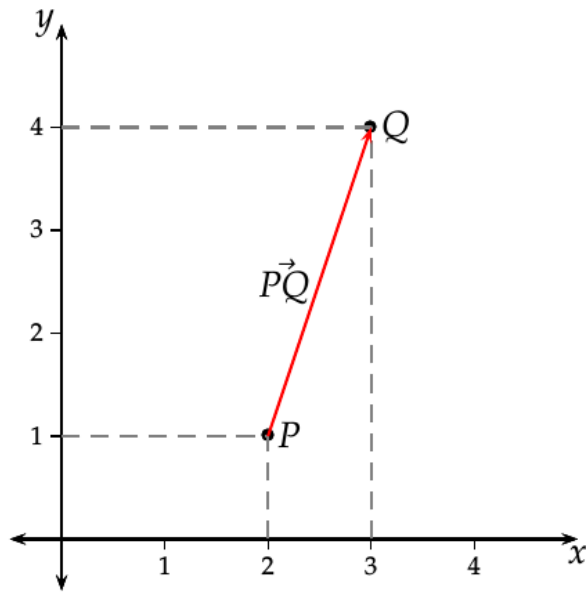


Figura 1.3: Definición de un vector a partir de dos puntos

1.1.5 Módulo de un vector

Definición 1.3 (Módulo de un vector). Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define el *módulo* de $\mathbf{v}$ como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

El módulo de un vector coincide con la longitud del segmento que representa al vector.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathbf{u} = (3, 4)$ un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Sea $\mathbf{v} = (4, 7, 4)$ un vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9.$$

1.1.6 Vectores unitarios

Definición 1.4 (Vector unitario). Se dice que un vector $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ es *unitario* si su módulo es 1, es decir $|\mathbf{v}| = 1$.

Especial atención merecen los vectores unitarios que siguen la dirección de los ejes de coordenadas, estos vectores se llaman *vectores coordenados*.

En $\mathbb{R}^2$ los vectores coordenados son

$$\mathbf{i} = (1, 0) \text{ y } \mathbf{j} = (0, 1)$$

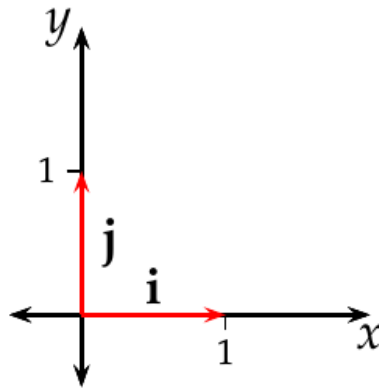


Figura 1.4: Vectores unitarios en el plano real

En $\mathbb{R}^3$ los vectores coordenados son

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ y } \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

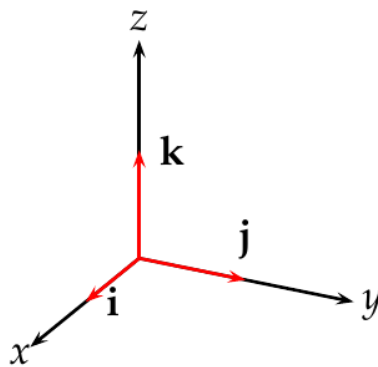


Figura 1.5: Vectores unitarios en espacio real

1.1.7 Suma de vectores

Definición 1.5 (Suma de vectores). Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define la *suma* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

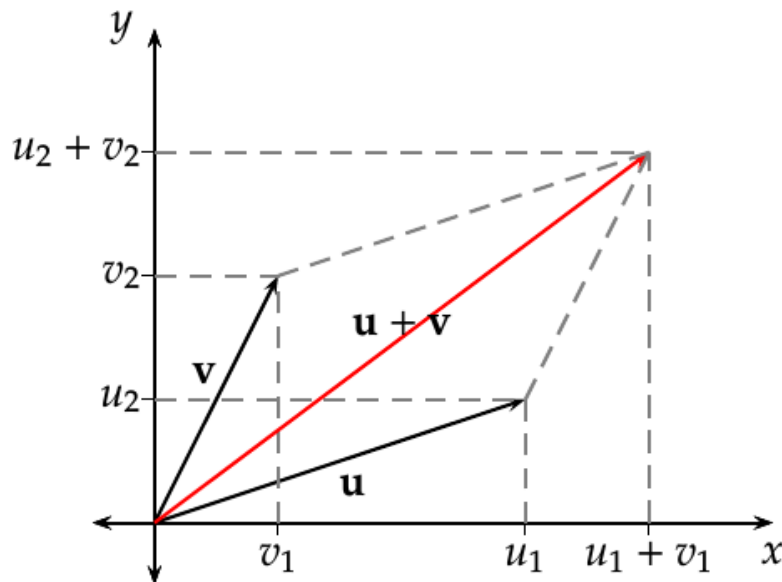


Figura 1.6: Suma de vectores

Ejemplo 1.4. Sean $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 2, 1 + 3) = (5, 4).$$

1.1.8 Producto de un vector por un escalar

Definición 1.6 (Producto de un vector por un escalar). Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, y un escalar $a \in \mathbb{R}$, se define el *producto* de a por $\mathbf{v}$ como

$$a\mathbf{v} = (av_1, \dots, av_n).$$

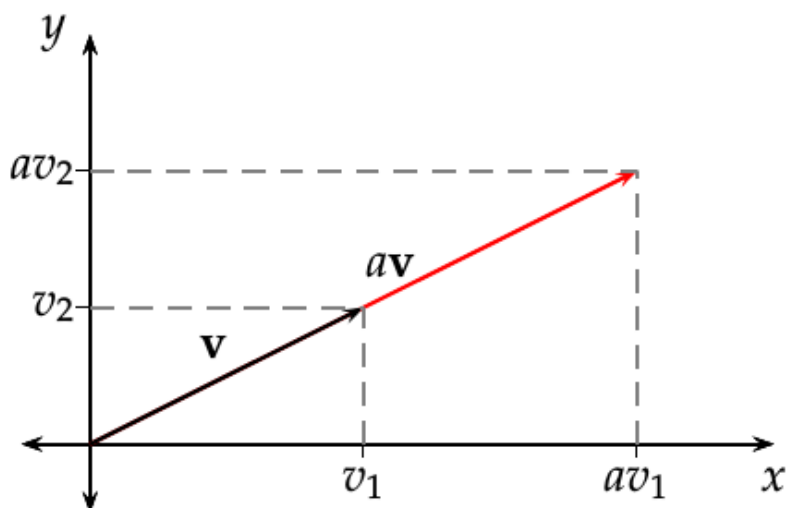


Figura 1.7: Producto de un vector por un escalar

Ejemplo 1.5. Sean el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ y el escalar $a = 2$, entonces

$$a\mathbf{v} = 2(2, 1) = (4, 2).$$

1.1.9 Expresión de un vector como combinación lineal de los vectores coordenados

La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar permite expresar cualquier vector como una combinación lineal de los vectores coordenados.

En el caso del espacio real $\mathbb{R}^3$, cualquier vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ puede expresarse como

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

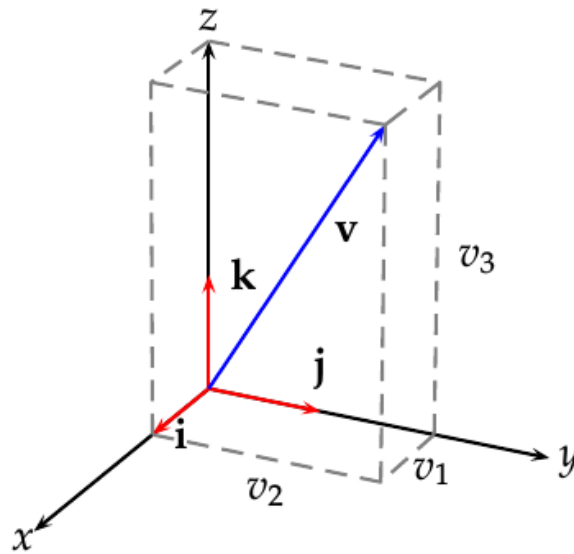


Figura 1.8: Expresión de un vector como combinación lineal de los vectores coordenados

1.1.10 Producto escalar

Definición 1.7 (Producto escalar). Dados dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, se define el *producto escalar* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Ejemplo 1.6. Sean $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9.$$

Teorema 1.1 (Producto escalar). *Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, se cumple que*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores.

1.1.11 Vectores paralelos

Definición 1.8 (Vectores paralelos). Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *paralelos* si existe un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v}.$$

Ejemplo 1.7. Los vectores $\mathbf{u} = (-4, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, -1)$ en $\mathbb{R}^2$ son paralelos, ya que

$$\mathbf{u} = (-4, 2) = -2(2, -1) = -2\mathbf{v}.$$

1.1.12 Vectores ortogonales y ortonormales

Definición 1.9 (Vectores ortogonales y ortonormales). Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son *ortogonales* si su producto escalar es nulo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Si además el módulo de ambos vectores es la unidad $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$, entonces se dice que son *ortonormales*.

Nota

Los vectores ortogonales son perpendiculares entre sí, es decir, forman un ángulo de 90° .

Ejemplo 1.8. Los vectores $\mathbf{u} = (2, 1)$ y $\mathbf{v} = (-2, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ son ortogonales, ya que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 0,$$

pero no son ortonormales ya que $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} \neq 1$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} \neq 1$.

Los vectores $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ son ortonormales, ya que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \quad |\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |\mathbf{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

1.2 Rectas

1.2.1 Ecuación vectorial de la recta

Definición 1.10 (Ecuación vectorial de la recta). Sea l una recta del espacio $\mathbb{R}^n$ y sean $P = (p_1, \dots, p_n)$ un punto cualquiera de la recta y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ un vector cualquiera con la misma dirección que la recta. La ecuación

$$l : X = P + t\mathbf{v} = (p_1, \dots, p_n) + t(v_1, \dots, v_n) = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n).$$

parametriza a l en función de $t \in \mathbb{R}$, y se conoce como *ecuación vectorial de la recta*.

Ejemplo 1.9. Considérese la recta del espacio real $\mathbb{R}^3$ que aparece en la gráfica. Un punto de la recta es $P = (1, 1, 2)$ y un vector director es $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$, luego su ecuación vectorial es

$$l : X = P + t\mathbf{v} = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 2) = (1 - t, 1 + 2t, 2 + t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

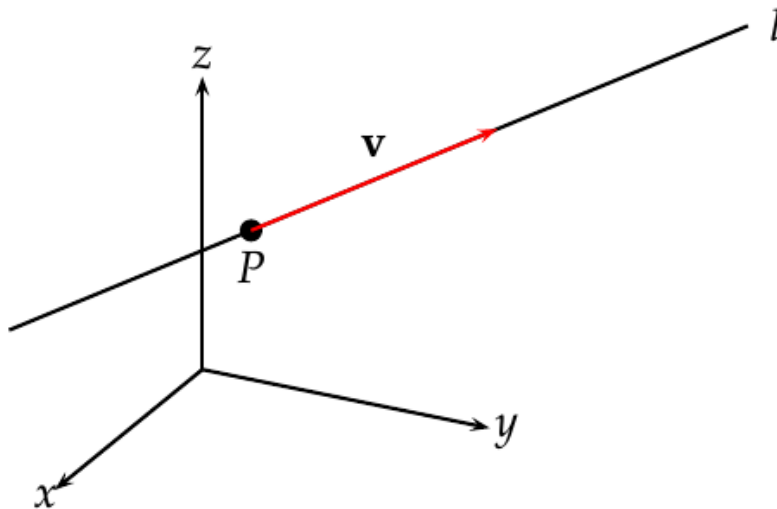


Figura 1.9: Ecuación vectorial de una recta en el espacio real

1.2.2 Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta

De la ecuación vectorial de una recta $l : X = P + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n)$ se obtienen fácilmente las coordenadas de los puntos que forman parte de la recta mediante n ecuaciones paramétricas:

$$x_1(t) = p_1 + tv_1, \dots, x_n(t) = p_n + tv_n$$

donde, si $\mathbf{v}$ es un vector cuyas coordenadas son no nulas ($v_i \neq 0 \ \forall i$), se puede despejar el parámetro t en cada una de ellas e igualarlas,

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n}$$

Ejemplo 1.10. Dada la ecuación vectorial de la recta $l : X = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 1) = (1 - t, 1 + 2t, 2 + t)$ en el espacio real $\mathbb{R}^3$, sus ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = 1 - t, \quad y(t) = 1 + 2t, \quad z(t) = 2 + t,$$

y sus ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{1}$$

1.2.3 Ecuación punto-pendiente de una recta en el plano

En el caso particular del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, si se tiene una recta con ecuación vectorial

$$l : X = P + t\mathbf{v} = (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + ta, y_0 + tb),$$

sus ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = x_0 + ta, \quad y(t) = y_0 + tb$$

y su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

A partir de aquí, pasando b multiplicando al otro lado de la ecuación, se obtiene

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \text{ o bien } y - y_0 = m(x - x_0),$$

llamando $m = b/a$. Esta ecuación se conoce como ecuación en la forma *punto-pendiente*.



[Ejemplo interactivo](#)

1.2.4 Pendiente de una recta en el plano

Definición 1.11 (Pendiente de una recta). Dada una recta $l : X = P + t\mathbf{v}$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, con vector director $\mathbf{v} = (a, b)$, se define la pendiente de l como b/a .

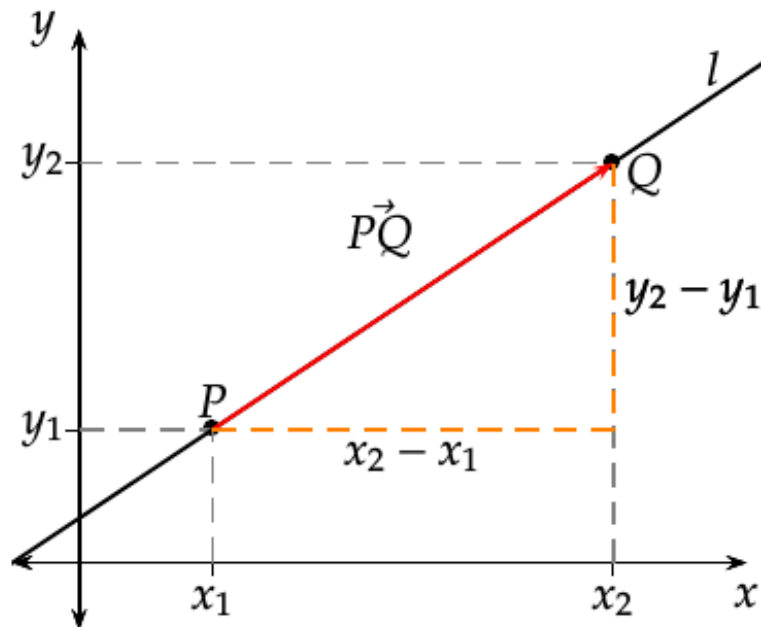


Figura 1.10: Pendiente de una recta en el plano real



[Ejemplo interactivo](#)

Recordar que dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ de la recta l , se puede tomar como vector director el vector que los une, que tiene coordenadas $\vec{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, de manera que la pendiente de l será $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, es decir, el cociente entre lo que cambia la coordenada y y lo que cambia la coordenada x .

1.3 Planos

1.3.1 Ecuación vectorial del plano en el espacio real

Para llegar a la ecuación de un plano en el espacio real $\mathbb{R}^3$ se puede partir de un punto del plano $P = (x_0, y_0, z_0)$ y de un vector perpendicular al plano $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Entonces, para cualquier punto del plano $Q = (x, y, z)$ se cumple que el vector $\vec{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, por lo que su producto escalar se anulará.

Definición 1.12 (Ecuación vectorial de un plano en el espacio). Dado un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en el espacio real $\mathbb{R}^3$, la *ecuación vectorial del plano* que pasa por P perpendicular a $\mathbf{v} = (a, b, c)$ es

$$\vec{PQ} \cdot \mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

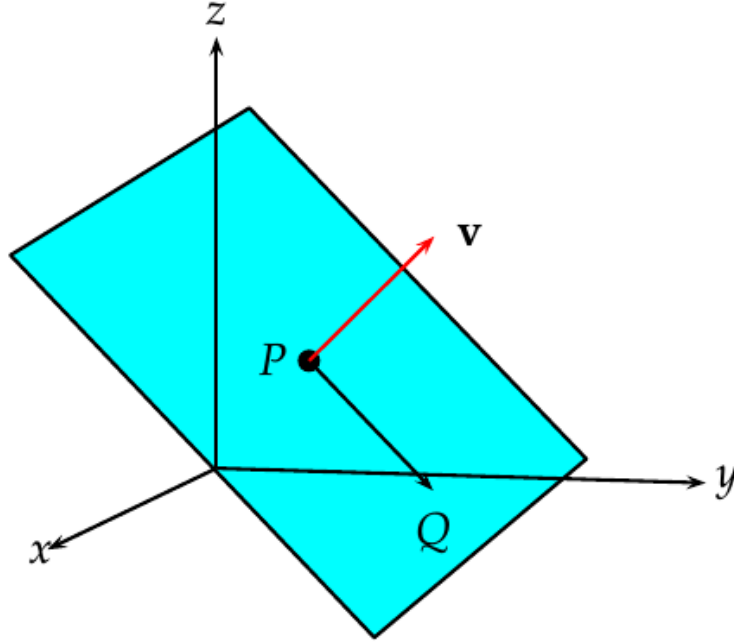


Figura 1.11: Ecuación de un plano en el espacio real

1.3.2 Ecuación escalar de un plano en el espacio

De la ecuación vectorial del plano se obtiene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0,$$

que, renombrando $d = ax_0 + by_0 + cz_0$, puede reescribirse como

$$ax + by + cz = d,$$

y se conoce como *ecuación escalar del plano*.

Example. Dado el punto $P = (2, 1, 1)$ y el vector $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$, la ecuación vectorial del plano que pasa por P y es ortogonal a $\mathbf{v}$ es

$$(x - 2, y - 1, z - 1)(2, 1, 2) = 2(x - 2) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0,$$

y su ecuación escalar es

$$2x + y + 2z = 7.$$

2 Funciones elementales

2.1 El concepto de función

2.1.1 ¿Qué es una función?

Definición 2.1 (Función de una variable). Una *función* f de un conjunto A en otro B es una *relación* que asocia cada elemento $a \in A$, con un *único* elemento de B que se denota $f(a)$, y se llama *imagen* de a mediante f .

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

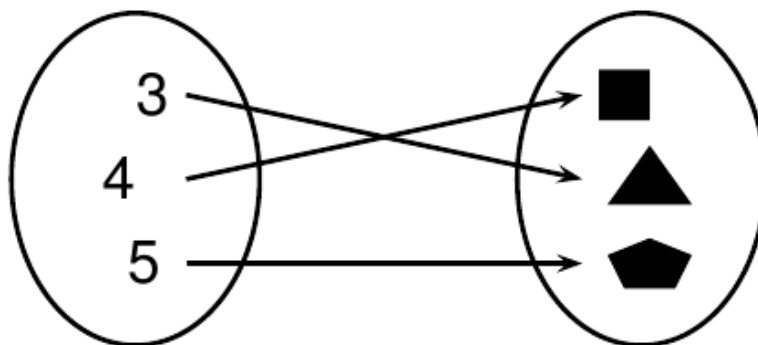


Figura 2.1: Correspondencia de una función

Cuando el conjunto inicial y final es el de los números reales $\mathbb{R}$, entonces se dice que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función real de variable real*.

2.1.2 Formas de representar una función

2.1.2.1 Por extensión

Representación en forma de tabla

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

Representación gráfica

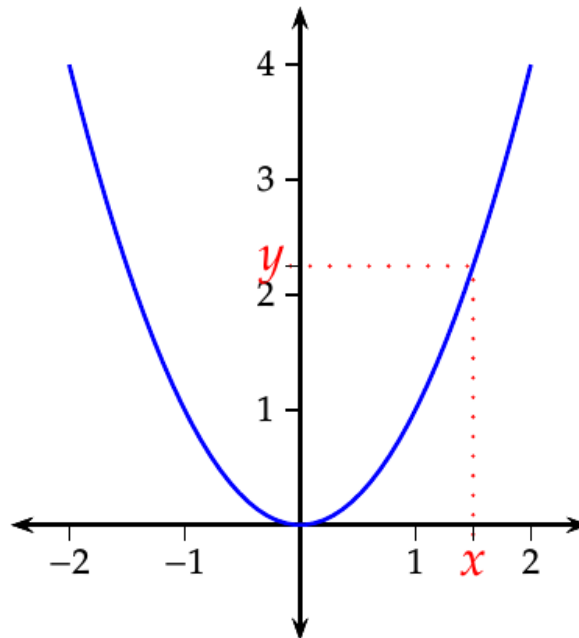


Figura 2.2: Función cuadrado

2.1.2.2 Por Intensión

Representación algebraica explícita

$$y = x^2$$

Representación algebraica implícita

$$y - x^2 = 0$$

Representación algebraica paramétrica

$$\begin{cases} y = t^2 \\ x = t \end{cases}$$

2.1.2.3 La función Identidad

Definición 2.2 (Función Identidad). Se llama *función identidad*, a toda función $Id : A \rightarrow A$ que asocia cada elemento de A consigo mismo, es decir,

$$Id(x) = x.$$

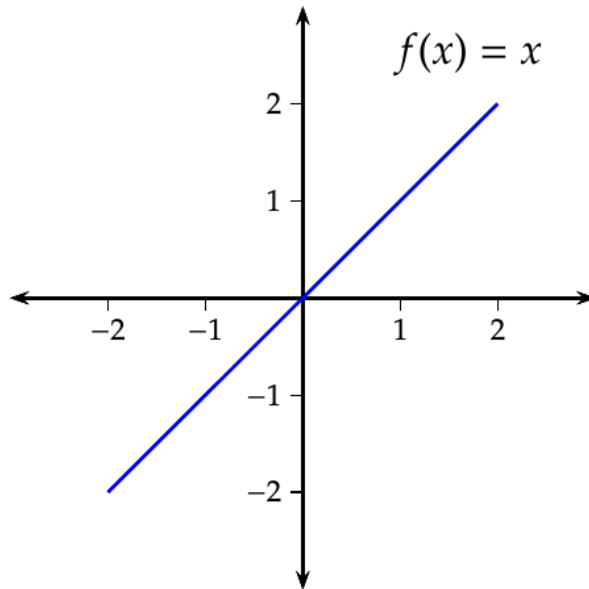


Figura 2.3: Función identidad

2.2 Dominio e imagen de una función

2.2.1 Dominio de una función

Definición 2.3 (Dominio de una función). El *dominio* de una función f es el conjunto de valores para los que la función está definida

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.1. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

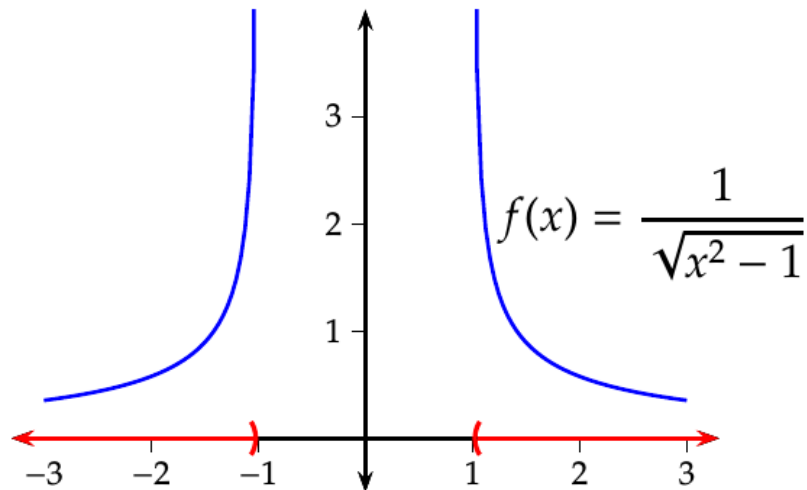


Figura 2.4: Ejemplo de dominio de una función

Para determinar su dominio hay que eliminar los valores en los que no está definida la función. En este caso hay que eliminar los valores que hacen negativo el radicando de la raíz del denominador, es decir, los valores de x tales que $x^2 - 1 < 0$, que son los valores que cumplen $-1 < x < 1$, pero también hay que eliminar del dominio los valores que anulan el denominador, es decir, los valores de x tales que $\sqrt{x^2 - 1} = 0$, que son $x = -1$ y $x = 1$. Por tanto, su dominio es

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

2.2.2 Imagen de una función

Definición 2.4 (Imagen de una función). La *imagen* de una función f es el conjunto de valores que la función puede tomar

$$\text{Img}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 2.2. Dada la función $f(x) = x^2 - 2$

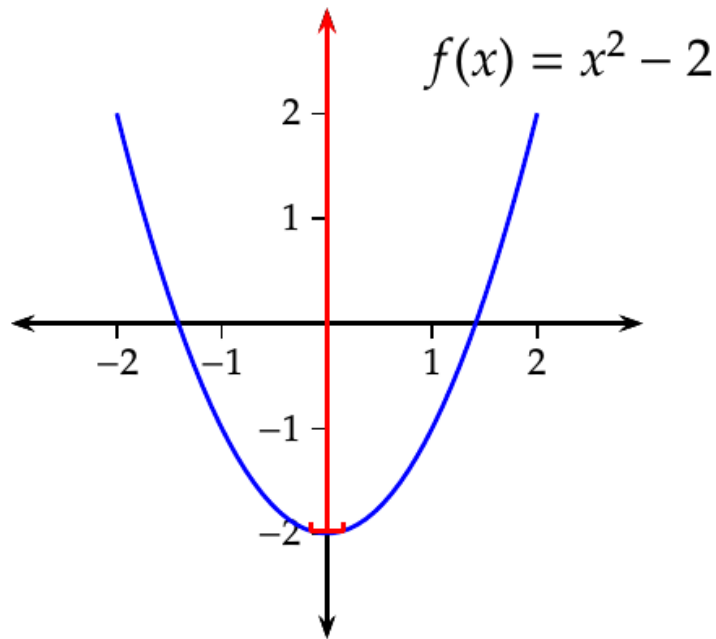


Figura 2.5: Ejemplo de la imagen de una función

Su imagen es

$$\text{Img}(f) = [-2, \infty)$$

ya que la función cuadrática x^2 puede tomar cualquier valor de 0 a ∞ (no toma nunca valores negativos), y al restarle 2, el mínimo valor que puede tomar la función f es -2 .

2.3 Composición e inversa de una función

2.3.1 Composición de funciones

Definición 2.5 (Composición de funciones). Dadas dos funciones $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$, se define la *función compuesta* $f \circ g$, (leído g compuesto con f) como la función

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow f(g(x)) \end{aligned}$$

Para calcular la función compuesta $f \circ g(x)$, primero se aplica g sobre x y luego, se aplica f sobre $g(x)$:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo 2.3. Si $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \sin x$, entonces

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sin \sqrt{x}.$$

2.3.2 Inversa de una función

Definición 2.6 (Función inversa). Se llama *función inversa* de $f : A \rightarrow B$ a la función $f^{-1} : B \rightarrow A$ (cuando exista) que cumple

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id(x)$$

La función inversa de f deshace o revierte el efecto de f . Es decir, si $f : A \rightarrow B$ asocia un elemento $x \in A$ con otro $y \in B$, entonces f^{-1} asocia el elemento y con el x .

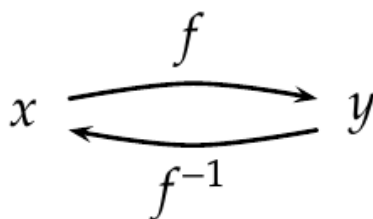


Figura 2.6: Función inversa

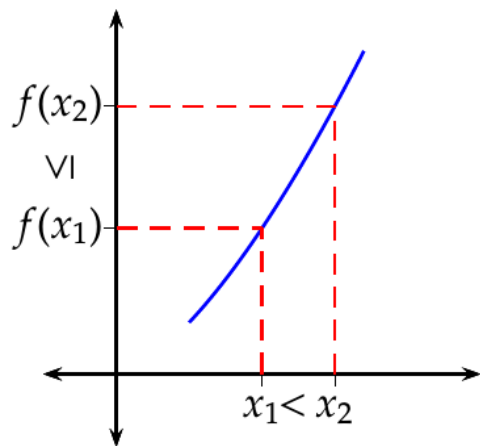
Ejemplo 2.4. La inversa de $f(x) = x^3$ es la función $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Sin embargo, la inversa de la función x^2 no es $\sqrt{x}$ ya que la raíz tiene dos imágenes, una positiva y otra negativa, y por tanto no sería una función.¹

2.4 Crecimiento de una función

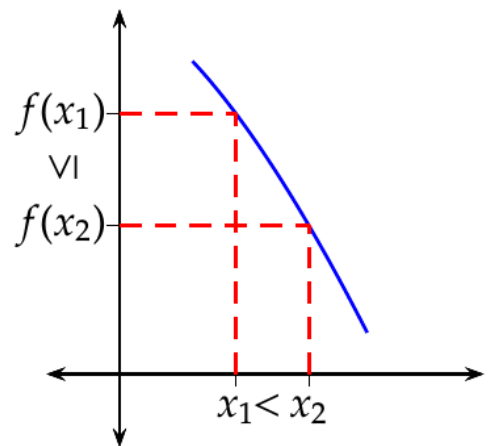
Definición 2.7 (Función creciente y decreciente). Se dice que una función f es *creciente* en un intervalo I , si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Se dice que una función f es *decreciente* en un intervalo I , si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$.

¹Para que exista la inversa de la función cuadrática es necesario restringir el dominio a los reales positivos para que sea inyectiva. En tal caso, la inversa es $+\sqrt{x}$.



Función creciente



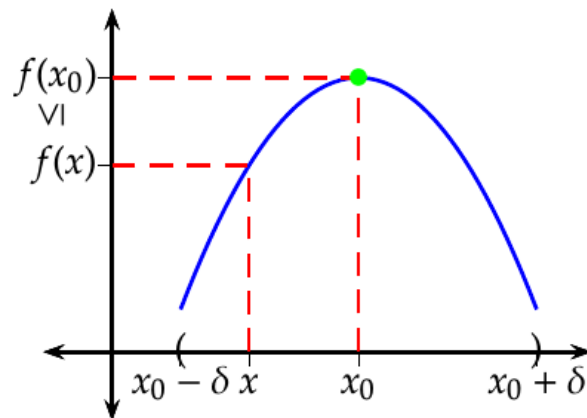
Función decreciente

Figura 2.7: Gráficas de funciones creciente y decreciente

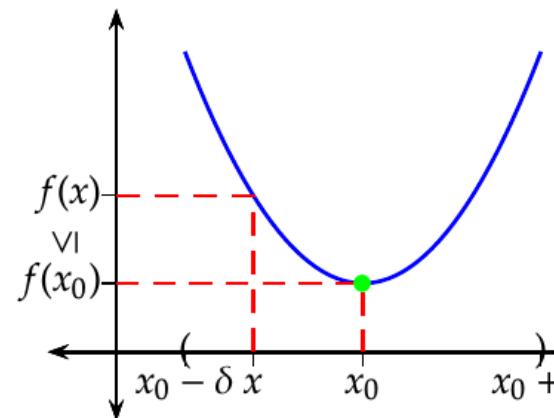
2.5 Extremos de una función

Definición 2.8 (Máximo y mínimo relativo). Se dice que una función f tiene un *máximo relativo* en x_0 , si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$.

Se dice que una función f tiene un *mínimo relativo* en x_0 , si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple $f(x_0) \leq f(x)$.



Máximo



Mínimo

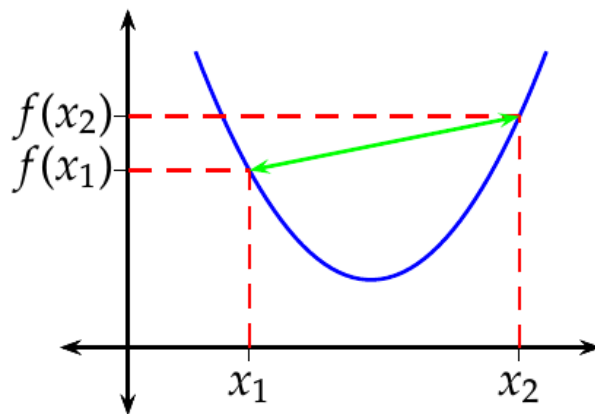
Figura 2.8: Gráfica del máximo y mínimo de una función

2.6 Concavidad de una función

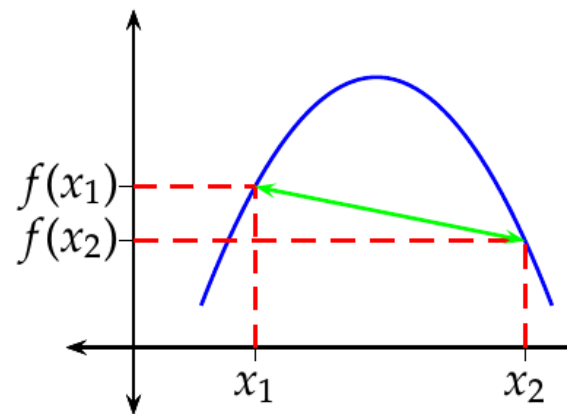
Definición 2.9 (Función cóncava y convexa). Se dice que una función f es *cóncava* en un intervalo I , si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica de f .

Se dice que una función f es *convexa* en un intervalo I , si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica de f .

Al punto donde cambia la concavidad de una función se le llama *punto de inflexión*.



Función cóncava



Función convexa

Figura 2.9: Gráfica de una función cóncava y otra convexa

2.7 Funciones periódicas

Definición 2.10 (Función periódica y periodo). Se dice que una función f es *periódica* si existe un valor $h > 0$ tal que

$$f(x + h) = f(x)$$

para todo $x \in \text{Dom}(f)$.

Al menor valor de h que verifica la igualdad anterior se le llama *periodo* de f , y a la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función se le llama *amplitud* de f .

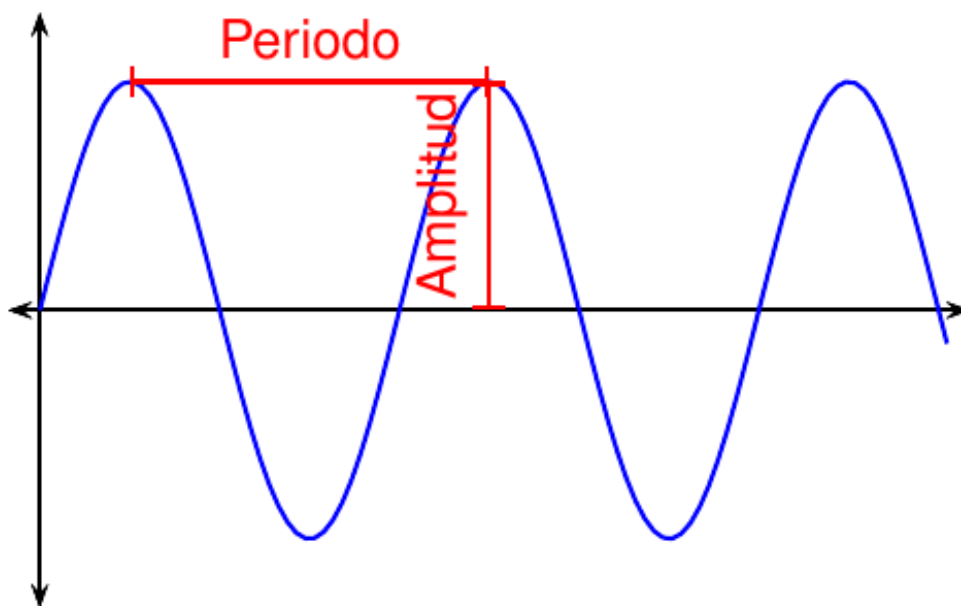


Figura 2.10: Gráfica de una función periódica

2.8 Funciones polinómicas

Definición 2.11 (Función polinómica). Una *función polinómica* es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

donde n es un entero no negativo que se llama *grado del polinomio*, y $a_0, \dots, a_n$ son constantes reales ($a_n \neq 0$) que se llaman *coeficientes del polinomio*.

Ejemplo 2.5.

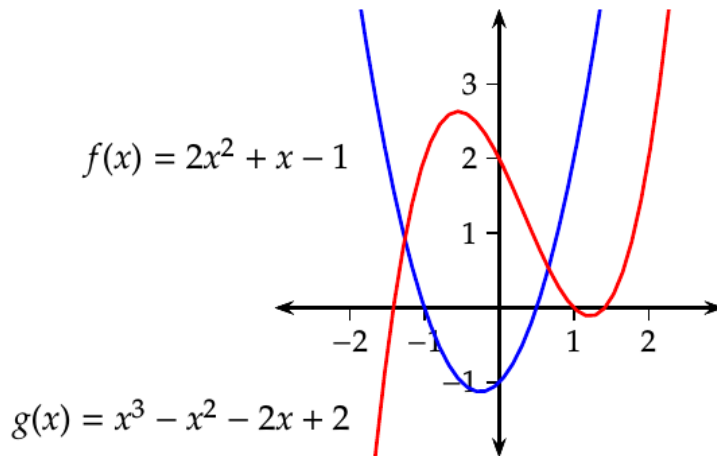


Figura 2.11: Gráficas de funciones polinómicas

2.8.1 Propiedades de las funciones polinómicas

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Si el grado es impar, su imagen es $\mathbb{R}$.
- La función identidad $Id(x) = x$ es un polinomio de grado 1.
- Las funciones constantes $f(x) = c$ son polinomios de grado 0.
- Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces (puntos donde $f(x) = 0$).

2.9 Funciones racionales

Definición 2.12 (Función racional). Una *función racional* es una función de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas con $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 2.6.

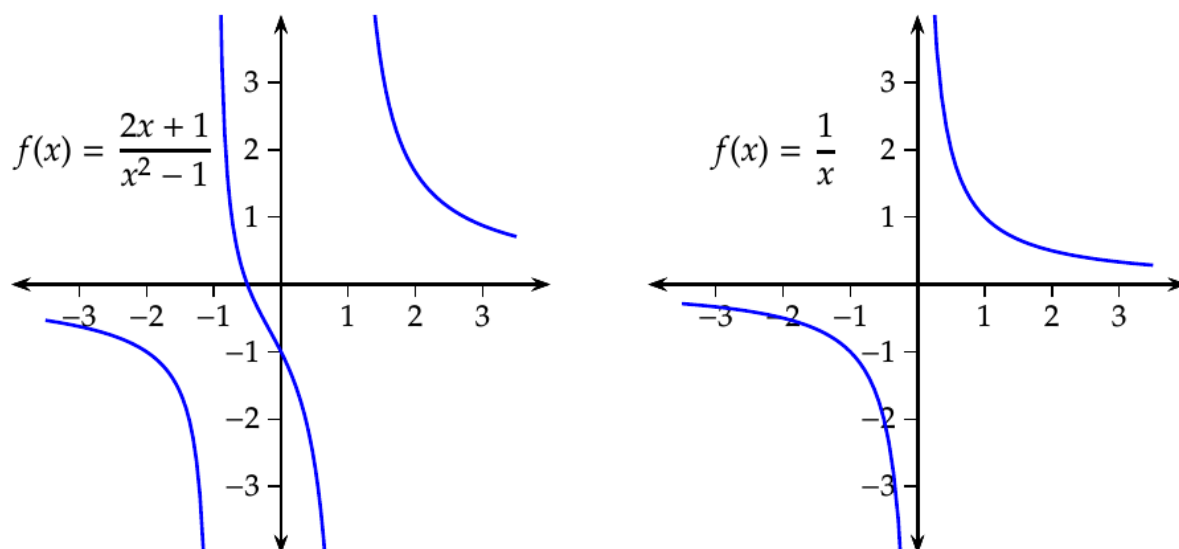


Figura 2.12: Gráficas de funciones racionales

2.9.1 Propiedades de las funciones racionales

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del polinomio del denominador. En estos puntos suele haber asíntotas verticales.
- La tendencia en ∞ y $-\infty$ depende del grado del numerador y del denominador. Si

$$f(x) = \frac{a_0 + \dots + a_n x^n}{b_0 + \dots + b_m x^m}, \text{ entonces}$$

- Si $n > m \rightarrow f(\pm\infty) = \pm\infty$.
- Si $n < m \rightarrow f(\pm\infty) = 0$.
- Si $n = m \rightarrow f(\pm\infty) = \frac{a_n}{b_m}$.

- Los polinomios son casos particulares de funciones racionales.
- Pueden descomponerse en suma de fracciones simples.

2.10 Funciones potenciales

Definición 2.13 (Función potencial). Una *función potencial* es una función de la forma

$$f(x) = x^r,$$

donde r es un número real.

Ejemplo 2.7.

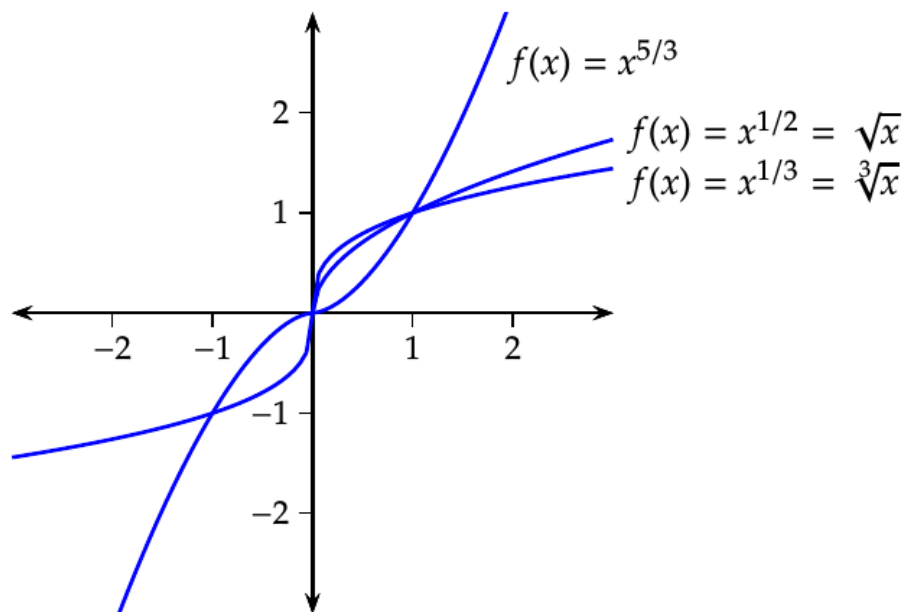


Figura 2.13: Gráficas de funciones potenciales

2.10.1 Propiedades de las funciones potenciales

- Si el exponente es un número racional n/m , entonces

$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}.$$

Estas funciones se llaman *irracionales*. En este caso,

- si m es impar el dominio es $\mathbb{R}$,
- si m es par el dominio es $\mathbb{R}^+$.
- Todas pasan por el punto $(1, 1)$.
- El crecimiento depende del exponente. Si $x > 0$ entonces:
 - Exponente positivo $\Rightarrow$ función creciente.
 - Exponente negativo $\Rightarrow$ función decreciente.Además, si $f(x) = x^r$ y $g(x) = x^s$, entonces:
 - Si $r < s \Rightarrow f(x) > g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) < g(x)$ si $x > 1$.
 - Si $r > s \Rightarrow f(x) < g(x)$ si $0 < x < 1$ y $f(x) > g(x)$ si $x > 1$.
- Los polinomios de la forma $f(x) = x^n$ son un caso particular de funciones potenciales.

2.11 Funciones exponenciales

Definición 2.14 (Función exponencial). Una *función exponencial* de base a es una función de la forma

$$f(x) = a^x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.

Ejemplo 2.8.

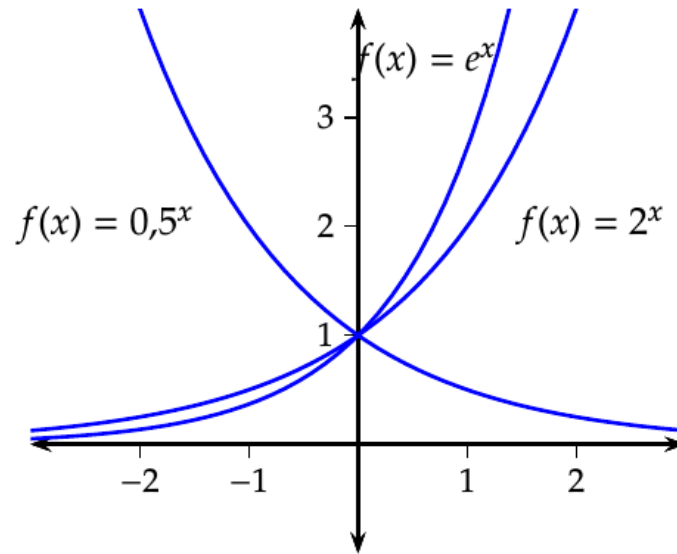


Figura 2.14: Gráficas de funciones exponenciales

2.11.1 Propiedades de las funciones exponenciales

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}^+$.
- Todas pasan por el punto $(0, 1)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = a^x$ entonces
 - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.
 - Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente. Además, si $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ con $a < b$, entonces
 - Si $x < 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$.
 - Si $x > 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- Un caso particular sería $a = 1$ que es una función constante.

2.12 Funciones logarítmicas

Definición 2.15 (Función logarítmica). Dada una función exponencial $f(x) = a^x$, se define la *función logarítmica* de base a como la función inversa de f , y se denota

$$f^{-1}(x) = \log_a x,$$

donde a es un valor real positivo distinto de 1.

Ejemplo 2.9.

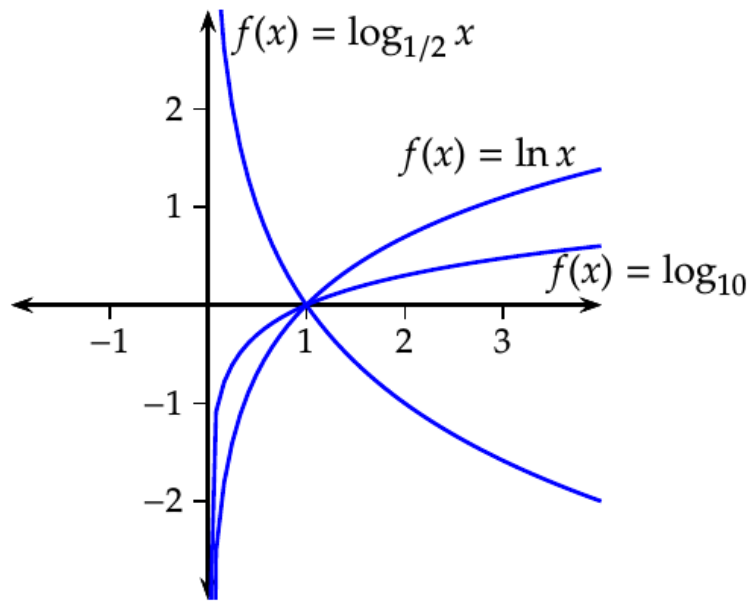


Figura 2.15: Gráficas de funciones logarítmicas

2.12.1 Propiedades de las funciones logarítmicas

- Por ser la inversa de la función exponencial, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
 - Su dominio es la imagen de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}^+$.
 - Su imagen es el dominio de la función exponencial, es decir $\mathbb{R}$.
- Todas pasan por el punto $(1, 0)$.
- El crecimiento depende de la base. Si $f(x) = \log_a x$ entonces
 - Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ función decreciente.

- Si $a > 1 \Rightarrow$ función creciente. Además, si $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_b x$ con $a < b$, entonces
- Si $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- Si $x > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$
- No tiene sentido para $a = 1$ por que sería una función constante.

2.13 Funciones trigonométricas

Surgen en geometría al medir las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo, que dependen del ángulo del cateto contiguo y la hipotenusa de dicho triángulo. No obstante, esta no es la única definición posible, sino que también pueden definirse a partir de la función exponencial compleja.

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Arcoseno
- Arcocoseno
- Arcotangente

2.13.1 Seno de un ángulo

Definición 2.16 (Seno de un ángulo). Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *seno* de α , y se nota $\text{sen } \alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

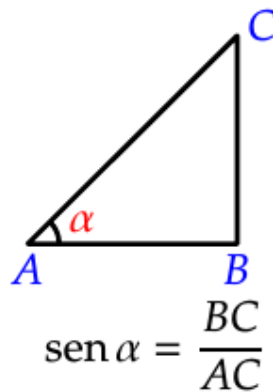


Figura 2.16: Definición del seno en un triángulo rectángulo

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX , como el cociente entre la ordenada de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.

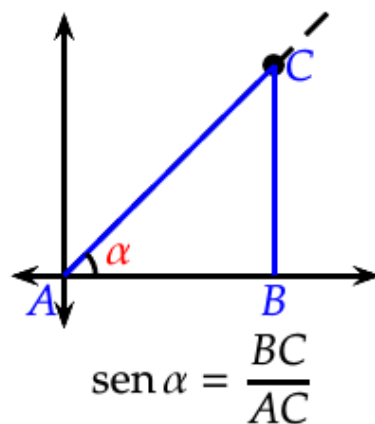


Figura 2.17: Definición del seno en la circunferencia

2.13.2 Función seno

Definición 2.17 (Función seno). Se define la función *seno*,

$$f(x) = \text{sen } x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su seno.

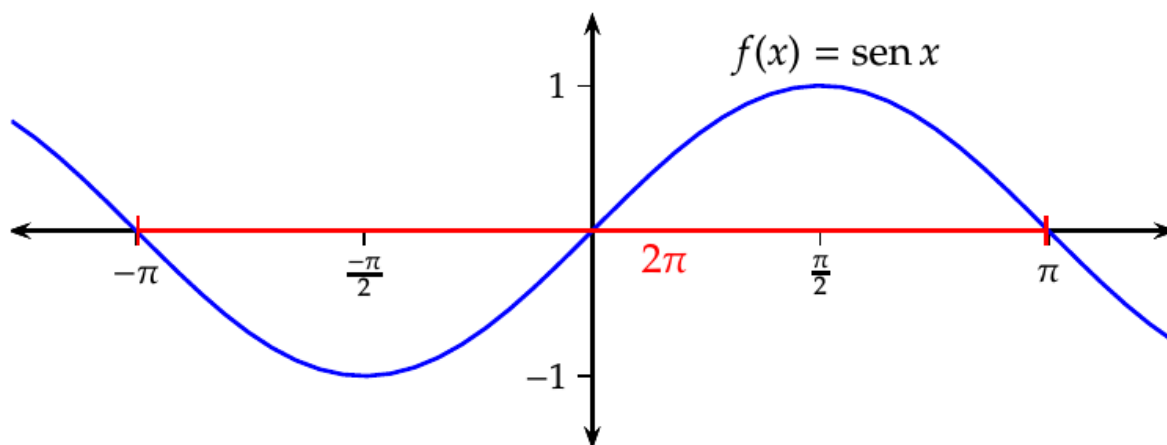


Figura 2.18: Gráfica de la función seno

2.13.3 Propiedades de la función seno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, $\operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\operatorname{sen} 3\pi/2 = -1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.
- Es una función impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

2.13.4 Coseno de un ángulo

Definición 2.18 (Coseno de un ángulo). Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define el *coseno* de α , y se nota $\cos \alpha$, como el cociente entre el cateto contiguo y la hipotenusa.

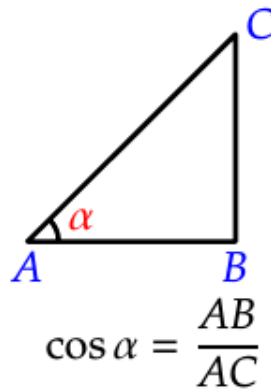


Figura 2.19: Definición del coseno en un triángulo rectángulo

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX , como el cociente entre la abscisa de cualquier punto del otro lado y su distancia al vértice.

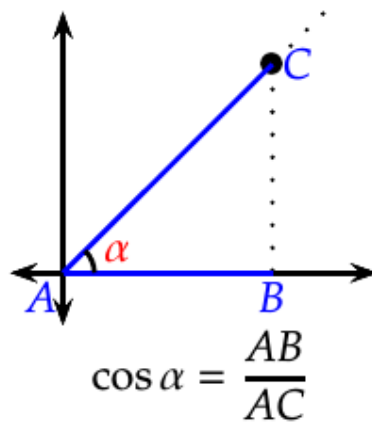


Figura 2.20: Definición del coseno en la circunferencia

2.13.5 Función coseno

Definición 2.19 (Función coseno). Se define la función *coseno*,

$$f(x) = \cos x$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su coseno.

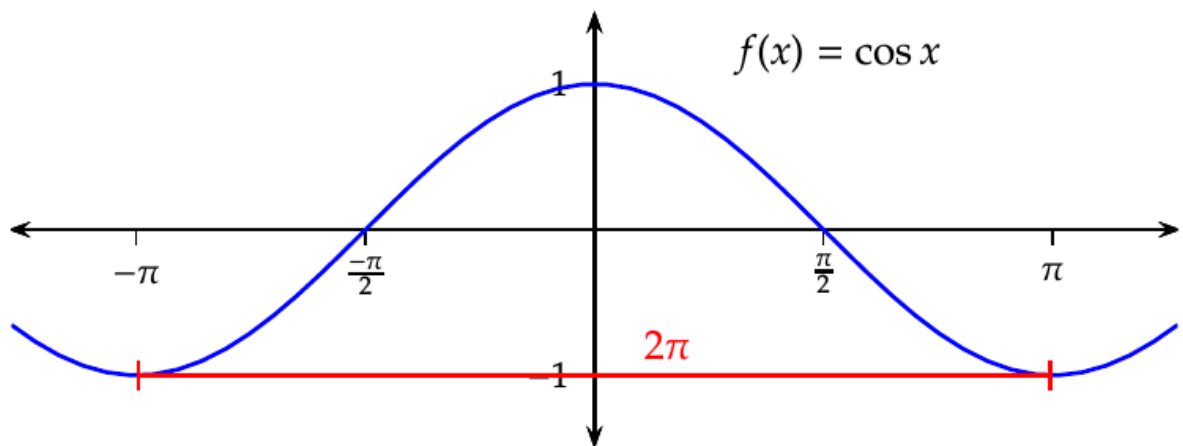


Figura 2.21: Gráfica de la función coseno

2.13.6 Propiedades de la función coseno

- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.
- Es periódica, con periodo 2π y amplitud 2

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/3 = \sqrt{2}/2$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$, $\cos 2\pi = 1$.
- Es una función par: $\cos(-x) = \cos x$.

2.13.7 Tangente de un ángulo

Definición 2.20 (Tangente de un ángulo). Sea α cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se define la *tangente* de α , y se nota $\operatorname{tg} \alpha$, como el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo.

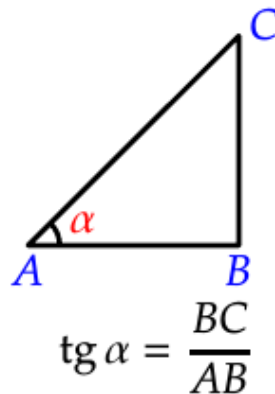


Figura 2.22: Definición de la tangente en un triángulo rectángulo

La definición se extiende fácilmente a ángulos de circunferencia con vértice en el origen y uno de sus lados el eje OX , como el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto del otro lado.

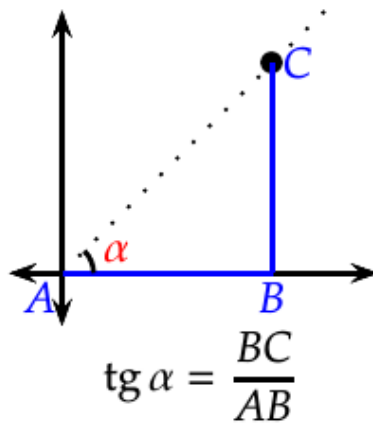


Figura 2.23: Definición de la tangente en la circunferencia

2.13.8 Función tangente

Definición 2.21 (Función tangente). Se define la función *tangente*,

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

como la función que asocia a cada ángulo x (habitualmente medido en radianes) su tangente.

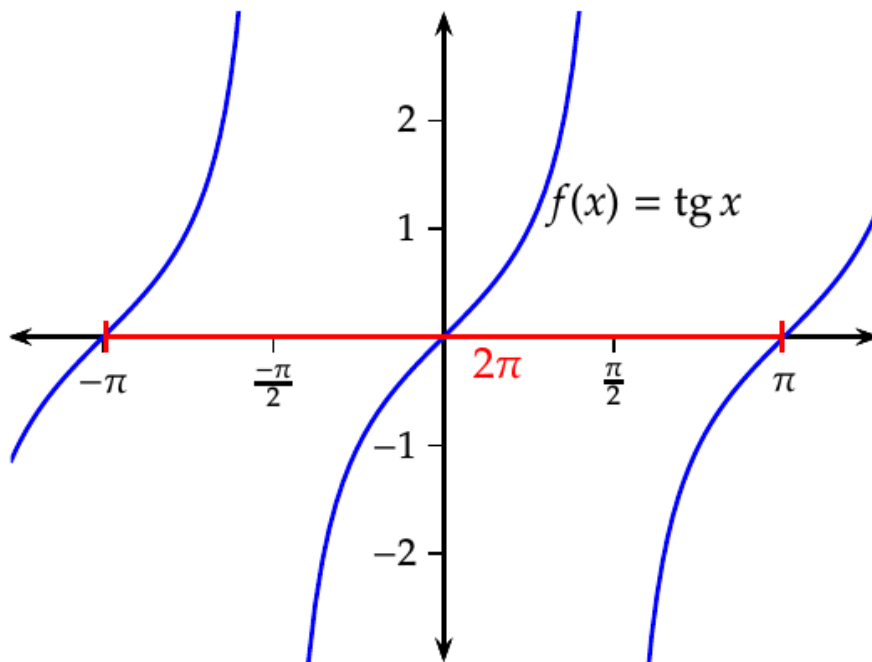


Figura 2.24: Gráfica de la función tangente

2.13.9 Propiedades de la función tangente

- Su dominio es $\mathbb{R}$ menos las raíces del coseno, es decir $\mathbb{R} - \{2k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Su imagen es $\mathbb{R}$.
- Es periódica, con periodo 2π

$$\operatorname{tg}(x + 2k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Algunos valores para recordar: $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, $\operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{tg} 2\pi = 0$.

2.13.10 Función arcoseno

Definición 2.22 (Función arcoseno). Se define la función *arcoseno*,

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x$$

como la función inversa de la función seno.

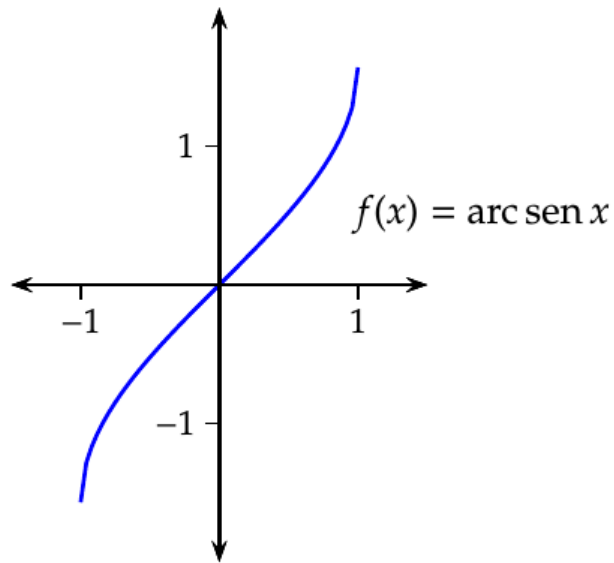


Figura 2.25: Gráfica de la función arcoseno

2.13.11 Propiedades de la función arcoseno

- Por ser la inversa de la función seno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
 - Su dominio es la imagen de la función seno, es decir $[-1, 1]$.
 - Su imagen es el dominio restringido de la función seno, es decir $[-\pi/2, \pi/2]$.²
- Es creciente en todo el dominio.

2.13.12 Función arcocoseno

Definición 2.23 (Función arcocoseno). Se define la función *arcocoseno*,

$$f(x) = \arccos x$$

como la función inversa de la función coseno.

²Para que exista la inversa de la función seno, es necesario restringir su dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$ para que sea inyectiva.

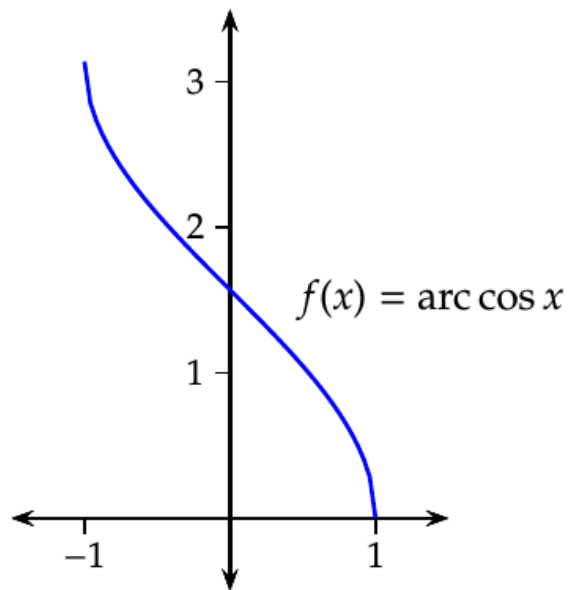


Figura 2.26: Gráfica de la función arcocoseno

2.13.13 Propiedades de la función arcocoseno

- Por ser la inversa de la función coseno, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
 - Su dominio es la imagen de la función coseno, es decir $[-1, 1]$.
 - Su imagen es el dominio restringido de la función coseno, es decir $[0, \pi]$.³
- Es decreciente en todo el dominio.

2.13.14 Función arcotangente

Definición 2.24 (Función arcotangente). Se define la función *arcotangente*,

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

como la función inversa de la función tangente.

³Para que exista la inversa de la función coseno, es necesario restringir su dominio a $[0, \pi]$ para que sea inyectiva.

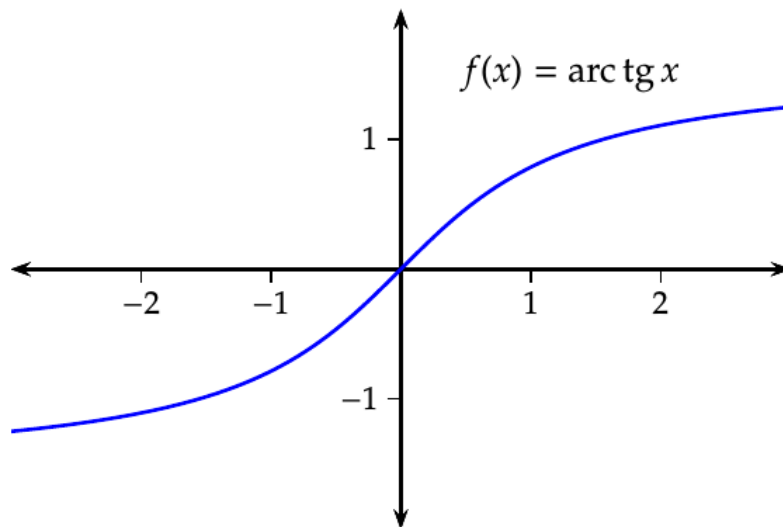


Figura 2.27: Gráfica de la función arcotangente

2.13.15 Propiedades de la función arcotangente

- Por ser la inversa de la función tangente, sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Por tanto:
 - Su dominio es la imagen de la función tangente, es decir $\mathbb{R}$.
 - Su imagen es el dominio restringido de la función tangente, es decir $(-\pi/2, \pi/2)$.⁴
- Es creciente en todo el dominio.

2.13.16 Algunas relaciones trigonométricas

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$

⁴Para que exista la inversa de la función tangente, es necesario restringir su dominio a $(-\pi/2, \pi/2)$ para que sea inyectiva.

3 Límites y continuidad

3.1 El concepto de límite

3.1.1 Aproximación al concepto de límite

El concepto de límite está ligado al de tendencia.

Decimos que x *tiende* a un valor a , y lo escribimos $x \rightarrow a$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a a como se quiera, pero sin llegar a valer a .

Si la aproximación es por defecto (con valores menores que a) se dice que x tiende a a por la izquierda, y se escribe $x \rightarrow a^-$, y si es por exceso (con valores mayores que a) se dice que x tiende a a por la derecha, y se escribe $x \rightarrow a^+$.

Cuando la variable x de una función f tiende a un valor a , cabe preguntarse si sus imágenes mediante f tienden a otro valor concreto:

Si $f(x)$ tiende a un valor l cuando x tiende a a , se dice que l es el *límite* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

3.1.2 Límites laterales

Si $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se dice que l es el *límite por la izquierda* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a^-$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x se aproxima a a por exceso, entonces se dice que l es el *límite por la derecha* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a^+$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l.$$

Ejemplo 3.1. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y veamos que pasa cuando $x \rightarrow 2$:

Aproximación por defecto

x	$f(x) = x^2$
1.9	3.61
1.99	3.9601
1.999	3.996001
1.9999	3.99960001

↓

$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$

Aproximación por exceso

x	$f(x) = x^2$
2.1	4.41
2.01	4.0401
2.001	4.004001
2.0001	4.00040001

↓

$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$

↓

$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

3.1.3 Límites que no existen (I)

Si la función no está definida entorno a un punto, entonces no existe el límite en dicho punto

Ejemplo 3.2. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ y veamos que pasa cuando $x \rightarrow 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	No existe
-0.01	No existe
-0.001	No existe

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	No existe
0.01	No existe
0.001	No existe

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

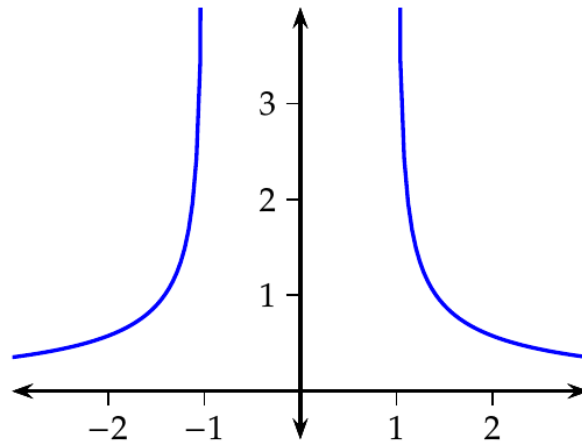


Figura 3.1: Gráfica de una función que no tiene límite

3.1.4 Límites que no existen (II)

Cuando los límites laterales no coinciden entonces no existe el límite

Ejemplo 3.3. Consideremos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \rightarrow 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1

↓

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	1
0.01	1
0.001	1

↓

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

⏟

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

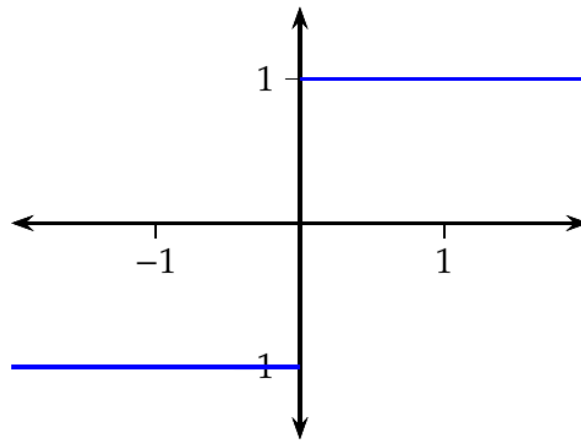


Figura 3.2: Gráfica de una función que no tiene límite

3.1.5 Límites que no existen (III)

A veces, cuando $x \rightarrow a$ los valores de $f(x)$ crecen o decrecen infinitamente y entonces no existe el límite. En este caso se dice que la función *diverge* y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 3.4. Veamos la tendencia de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	100
-0.01	10000
-0.001	1000000

↓

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	100
0.01	10000
0.001	1000000

↓

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

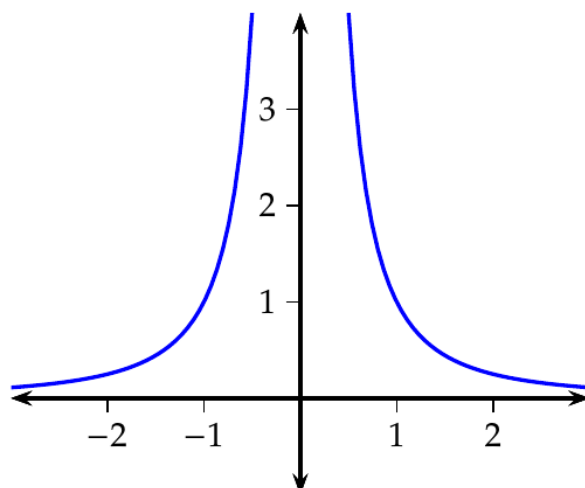


Figura 3.3: Gráfica de una función que no tiene límite

3.1.6 Límites que no existen (IV)

A veces, el límite de una función en un punto puede no existir porque la función oscila rápidamente al acercarnos a dicho punto.

Ejemplo 3.5. Consideremos la función $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ y veamos que pasa cuando $x \rightarrow 0$:

Por la izquierda

x	$f(x)$
-0.1	-0.1736
-0.01	-0.9848
-0.005	0.3420
-0.001	0.9848
-0.0005	0.3420
-0.0001	0.9848

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$

Por la derecha

x	$f(x)$
0.1	0.1736
0.01	0.9848
0.005	-0.3420
0.001	-0.9848
0.0005	-0.3420
0.0001	-0.9848

↓

No existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$

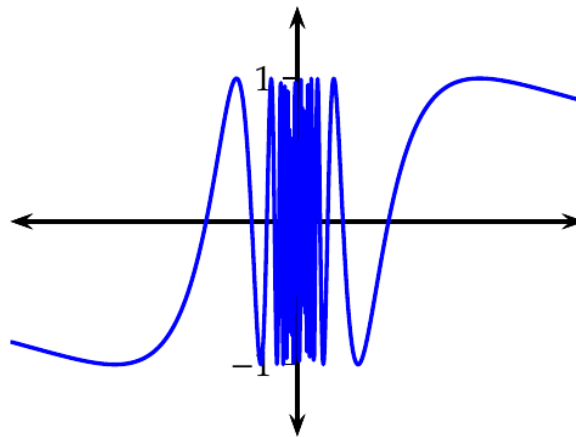


Figura 3.4: Gráfica de una función que no tiene límite

3.1.7 Límites en el infinito

Si $f(x)$ tiende a l cuando x crece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ tiende a l cuando x decrece infinitamente, entonces se dice que l es el *límite en el infinito* de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

Ejemplo 3.6. Estudiemos la tendencia de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$x \rightarrow +\infty$$

x	$f(x) = 1/x$
1000	0.001
10000	0.0001
100000	0.00001

↓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

x	$f(x) = 1/x$
-1000	-0.001
-10000	-0.0001
-100000	-0.00001

↓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

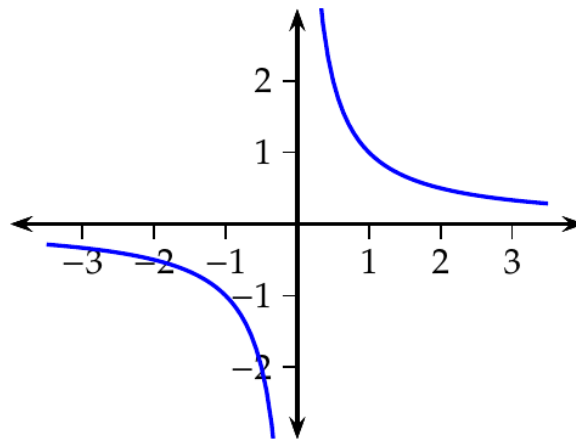


Figura 3.5: Gráfica de una función con límite en el infinito

3.1.8 Definición de límite

Definición 3.1 (Límite de una función en un punto). Se dice que el límite de la función f cuando $x \rightarrow a$ es l , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

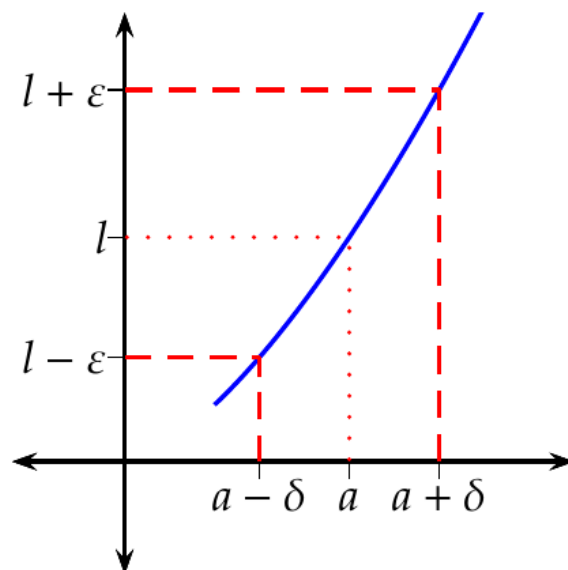


Figura 3.6: Explicación gráfica de la definición de límite

3.1.9 Definición de límite en el infinito

Definición 3.2 (Límite de una función en el infinito). Se dice que el límite de la función f cuando $x \rightarrow +\infty$ es l , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x > \delta$.

Se dice que el límite de la función f cuando $x \rightarrow -\infty$ es l , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

si para cualquier valor $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta < 0$ tal que, $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $x < \delta$.

3.2 Álgebra de límites

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces se cumple que

1. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, siendo c constante.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

3.2.1 Límites de las funciones elementales

- **Funciones polinómicas.** Si f es un polinomio, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones racionales.** Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ que no sea una raíz de $q(x)$, y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si a es una raíz de $q(x)$ entonces el límite puede existir o no.
- **Funciones potenciales.** Si $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto a tal que exista un intervalo $(a - \delta, a + \delta) \subset \text{Dom}(f)$ para algún $\delta > 0$, y en ese caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones exponenciales.** Si $f(x) = c^x$ con $c \in \mathbb{R}$ entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones logarítmicas.** Si $f(x) = \log_c x$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \mathbb{R}^+$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- **Funciones trigonométricas.** Si $f(x)$ es una función trigonométrica, entonces existe el límite de f en cualquier punto $a \in \text{Dom}(f)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

3.3 Indeterminaciones y su resolución

3.3.1 Tipos de indeterminaciones

Al calcular límites pueden aparecer las siguientes indeterminaciones:

- **Tipo cociente.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \rightarrow a$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo $\pm\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \rightarrow a$.

- **Tipo producto.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, entonces $f(x) \cdot g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $0 \cdot \pm\infty$ cuando $x \rightarrow a$.
- **Tipo potencia.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 1^∞ cuando $x \rightarrow a$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo 0^0 cuando $x \rightarrow a$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación del tipo ∞^0 cuando $x \rightarrow a$.

- **Tipo diferencia.** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, entonces $f(x) - g(x)$ presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ cuando $x \rightarrow a$.

3.3.2 Resolución de una indeterminación de tipo cociente

Existen diferentes técnicas para resolver una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

- Factorización de polinomios en funciones racionales.
- División por el términos de mayor orden en funciones racionales.
- Infinitésimos equivalentes.
- Regla de L'Hôpital.

3.3.2.1 Factorización de polinomios en funciones racionales

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \rightarrow a$, y a es una raíz de $p(x)$ y $q(x)$, se puede resolver la indeterminación factorizando los polinomios y simplificando.

Ejemplo 3.7. La función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \rightarrow \frac{0}{0}$ cuando $x \rightarrow 1$.

Para resolver la indeterminación factorizamos los polinomios

$$\begin{aligned}x^3 - 3x + 2 &= (x + 2)(x - 1)^2, \\x^4 - 4x + 3 &= (x^2 + 2x + 3)(x - 1)^2.\end{aligned}$$

Como el factor $(x - 1)^2$ es común, podemos simplificar la función en el cálculo del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)^2}{(x^2 + 2x + 3)(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

3.3.2.2 División por el término de mayor orden en funciones racionales

Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional que presenta una indeterminación de tipo cociente cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces se puede resolver dividiendo $p(x)$ y $q(x)$ por el término de mayor grado de ambos polinomios.

Ejemplo 3.8. La función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Para resolver la indeterminación dividimos numerador y denominador por x^4 que es el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4}}{\frac{x^4 - 4x + 3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

En general, si $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$, entonces:

- Si $n > m$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Si $n < m$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.
- Si $n = m$ entonces $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$.

3.3.2.3 Infinitésimos equivalentes

Definición 3.3 (Infinitésimos equivalentes). Si $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$, entonces se dice que f y g son *infinitésimos equivalentes* cuando $x \rightarrow a$ si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

En tal caso se escribe $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \rightarrow a$.

Si $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \rightarrow a$ entonces $f(x)$ y $g(x)$ son magnitudes equivalentes cuando $x \rightarrow a$.

Infinitésimos equivalentes cuando $x \rightarrow 0$:

¹Se puede simplificar porque aunque $x \rightarrow 1$, $x \neq 1$ y por tanto el denominador no se anula.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &\approx x \approx \operatorname{tg} x \\
1 - \cos x &\approx \frac{x^2}{2} \\
\operatorname{arctg} x &\approx x \\
e^x - 1 &\approx x \\
\log(1 + x) &\approx x
\end{aligned}$$

A veces se puede resolver una indeterminación cuando $x \rightarrow a$ substituyendo cualquier subexpresión de la función por un infinitésimo equivalente cuando $x \rightarrow a$.

Ejemplo 3.9. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3} \rightarrow \frac{0}{0}$ cuando $x \rightarrow 0$.

Como $\operatorname{sen} x \approx x$ y $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ cuando $x \rightarrow 0$, para resolver la indeterminación sustituimos $\operatorname{sen} x$ por x y $1 - \cos x$ por $\frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = 0.5.$$

3.3.2.4 Regla de L'Hôpital

Teorema 3.1 (Regla de L'Hôpital). Si $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \rightarrow a$, entonces si existe el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cuando $x \rightarrow a$ se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Advertencia

Para que exista $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ es necesario que f y g sean derivables en un entorno de a .

Ejemplo 3.10. Sea $f(x) = \frac{\log(x^2 - 1)}{x + 2} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Para resolver la indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - 1)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(x^2 - 1))'}{(x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x} = 0.\end{aligned}$$

3.3.3 Resolución de una indeterminación de tipo producto

Si $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces la indeterminación $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0 \cdot \pm\infty$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}.$$

Ejemplo 3.11. Sea $f(x) = x^2 e^{1/x^2} \rightarrow 0 \cdot \infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando ahora la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{1/x^2})'}{(1/x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2} \frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = \infty.$$

3.3.4 Resolución de una indeterminación de tipo potencia

Si $f(x)^{g(x)}$ presenta una indeterminación de tipo potencia cuando $x \rightarrow a$, entonces la indeterminación puede convertirse en una de tipo producto mediante la transformación:

$$\exp(\log f(x)^{g(x)}) = \exp(g(x) \cdot \log f(x)).$$

Ejemplo 3.12. Sea $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow 1^\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1/x}\right)\end{aligned}$$

Aplicando ahora la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log(1 + \frac{1}{x}))'}{(1/x)'}\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \exp(1) = e.$$

3.3.5 Resolución de una indeterminación de tipo diferencia

Si $f(x) \rightarrow \infty$ y $g(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a$, entonces la indeterminación $f(x) - g(x)$ puede convertirse en una de tipo cociente mediante la transformación:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}.$$

Ejemplo 3.13. Sea $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \rightarrow \infty - \infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \rightarrow \frac{0}{0}.$$

Aplicando ahora la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \\ &= \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3.4 Asíntotas de una función

Una asíntota de una función es una recta a la que tiende la función en el infinito, es decir, que la distancia entre la recta y la función es cada vez menor.

Existen tres tipos de asíntotas:

- **Asíntota vertical:** $x = a$,
- **Asíntota horizontal:** $y = a$,
- **Asíntota oblicua:** $y = a + bx$.

3.4.1 Asíntotas verticales

Definición 3.4 (Asíntota vertical). Se dice que una recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una función f si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Las asíntotas verticales deben buscarse en los puntos donde no está definida la función, pero si lo está en las proximidades.

Ejemplo 3.14. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty.$$

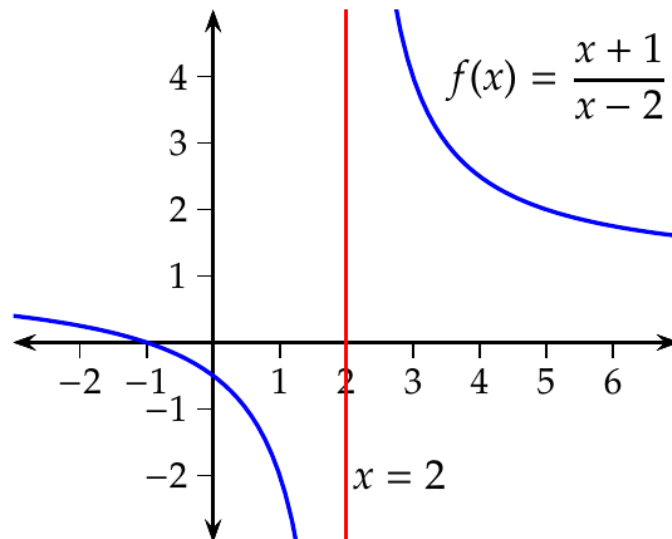


Figura 3.7: Gráfica de una asíntota vertical

3.4.2 Asíntotas horizontales

Definición 3.5 (Asíntota horizontal). Se dice que una recta $y = a$ es una *asíntota horizontal* de una función f si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Ejemplo 3.15. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x-2} = 1.$$

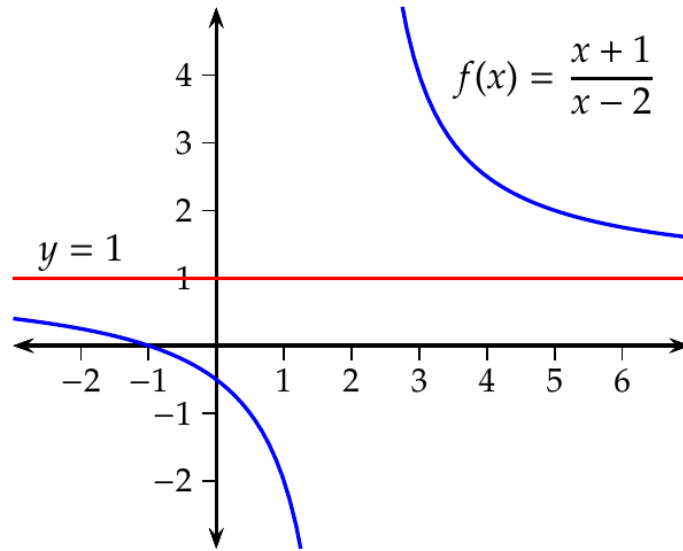


Figura 3.8: Gráfica de una asíntota horizontal

3.4.3 Asíntotas oblicuas

Definición 3.6 (Asíntota oblicua). Se dice que una recta $y = a + bx$ es una *asíntota oblicua* de una función f si se cumple

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = b \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - bx = a.$$

Ejemplo 3.16. La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{x}{x-1} = 1$$

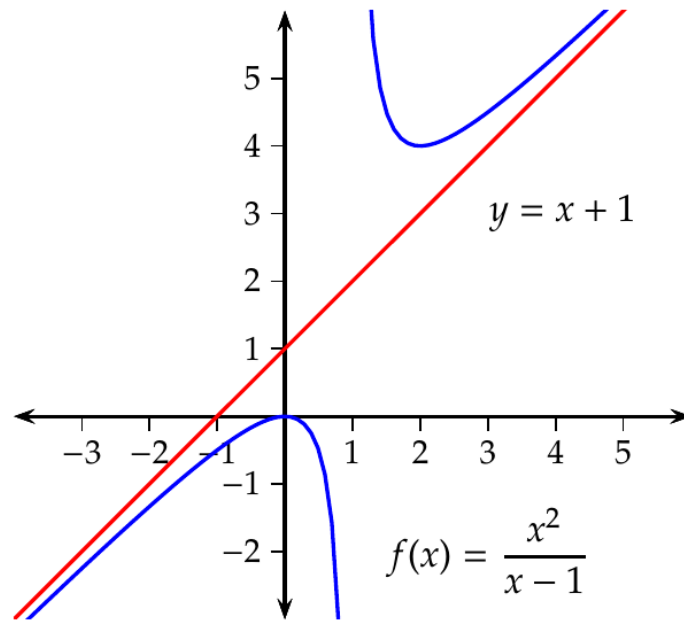


Figura 3.9: Gráfica de una asíntota oblicua

3.5 Continuidad

Definición 3.7 (Función continua en un punto). Se dice que una función f es *continua* en el punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

De esta definición se deducen tres condiciones necesarias para la continuidad:

1. $f(a) \in \text{Dom}(f)$.
2. Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si se rompe alguna de estas condiciones, se dice que la función presenta una discontinuidad en a .

Definición 3.8 (Función continua en un intervalo). Se dice que una función f es *continua* en un intervalo si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

La gráfica de una función continua en un intervalo puede dibujarse sin levantar el lápiz.

3.6 Tipos de discontinuidades

Dependiendo de la condición de continuidad que se rompa, existen distintos tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
- Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
- Discontinuidad de 2ª especie.

3.6.1 Discontinuidad evitable

Definición 3.9 (Discontinuidad evitable). Se dice que una función f tiene una *discontinuidad evitable* en el punto a si existe el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$ pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Ejemplo 3.17. La función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ ya que la función no está definida en $x = 1$ pero

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2.$$

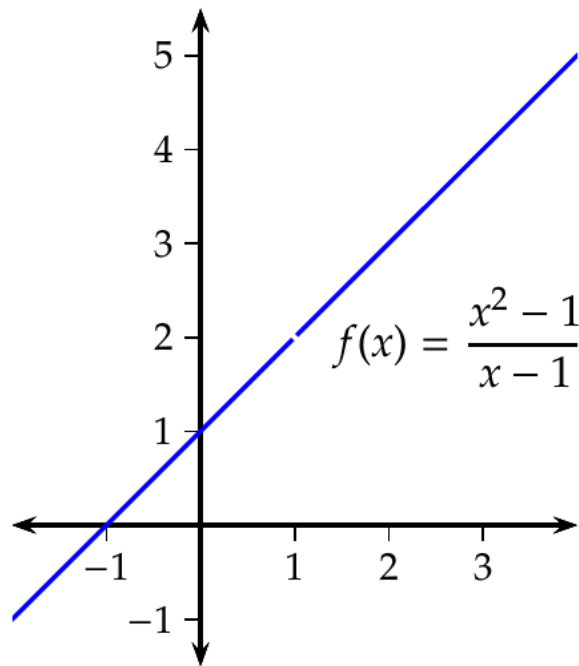


Figura 3.10: Gráfica de una discontinuidad evitable

3.6.2 Discontinuidad de 1ª especie de salto finito

Definición 3.10 (Discontinuidad de 1ª especie de salto finito). Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto finito* en el punto a si existen los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$ pero

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

A la diferencia entre ambos límites se le llama *salto* de la discontinuidad.

Ejemplo 3.18. La función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en $x = 0$ ya que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Salto} = 1 - (-1) = 2.$$

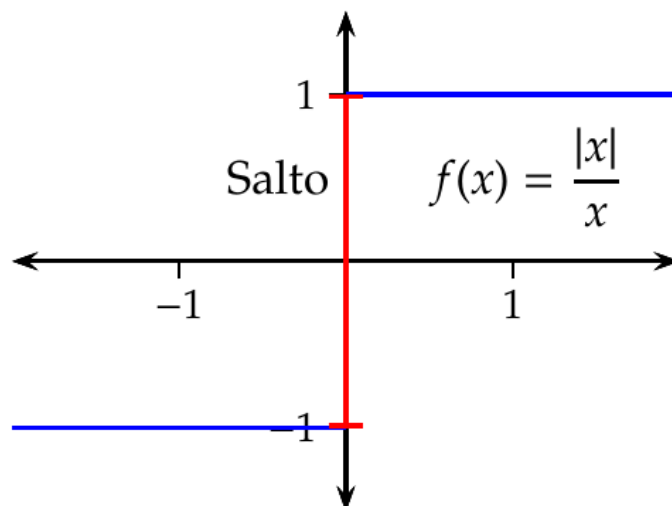


Figura 3.11: Gráfica de una discontinuidad de salto finito

3.6.3 Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito

Definición 3.11 (Discontinuidad de 1ª especie de salto infinito). Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 1ª especie de salto infinito* en el punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Si f tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en un punto a , entonces f tiene una asíntota vertical $x = a$.

Ejemplo 3.19. La función $f(x) = e^{1/x}$ tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = 0$ ya que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} &= \infty \end{aligned}$$

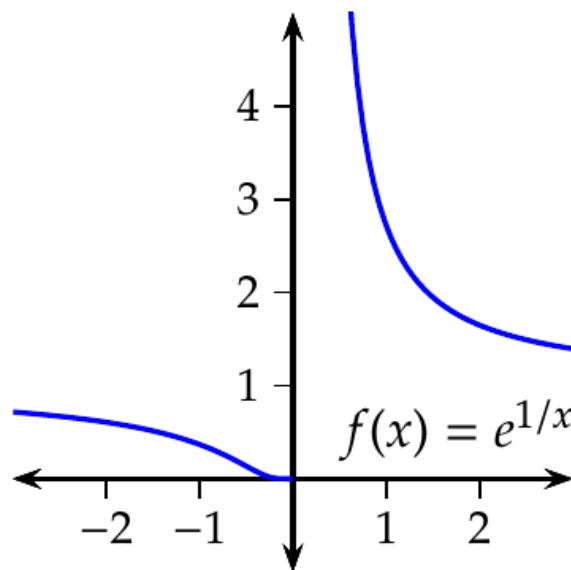


Figura 3.12: Gráfica de una discontinuidad de salto infinito

3.6.4 Discontinuidad de 2ª especie

Definición 3.12 (Discontinuidad de 2ª especie). Se dice que una función f tiene una *discontinuidad de 2ª especie* en el punto a si no existe alguno de los límites laterales y tampoco se trata de una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

Normalmente la discontinuidades de 2ª especie se dan en puntos donde la función no está definida en sus proximidades.

Ejemplo 3.20. La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ tiene una discontinuidad de 2ª especie en $x = 1$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

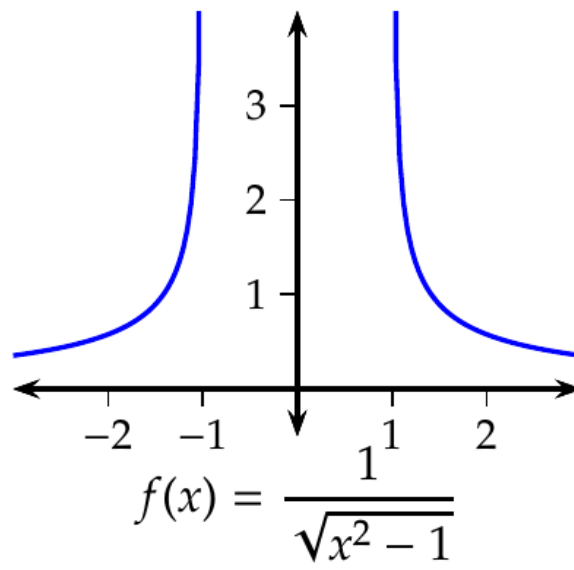


Figura 3.13: Gráfica de una discontinuidad de 2ª especie

4 Cálculo diferencial en una variable

4.1 El concepto de derivada

4.1.1 Tasa de variación media

Definición 4.1 (Incremento). Dada una función $y = f(x)$, se llama *incremento* de f en un intervalo $[a, b]$ a la diferencia entre el valor de f en cada uno de los extremos del intervalo, y se nota

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Cuando f es la función identidad $y = x$, se cumple que

$$\Delta x = \Delta y = f(b) - f(a) = b - a,$$

y por tanto, el incremento de x en un intervalo es la amplitud del intervalo. Esto nos permite escribir el intervalo $[a, b]$ como $[a, a + \Delta x]$.

Definición 4.2 (Tasa de variación media). Se llama *tasa de variación media* de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, al cociente entre el incremento de y y el incremento de x en dicho intervalo, y se escribe

$$\text{TVM } f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Ejemplo 4.1. Consideremos la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x .

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a , y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado una cantidad Δx , ¿en cuánto se incrementará el área del cuadrado?

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = \\ &= a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 = 2a\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

¿Cuál será la tasa de variación media del área en el intervalo $[a, a + \Delta x]$?

$$\text{TVM } f[a, a + \Delta x] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x.$$

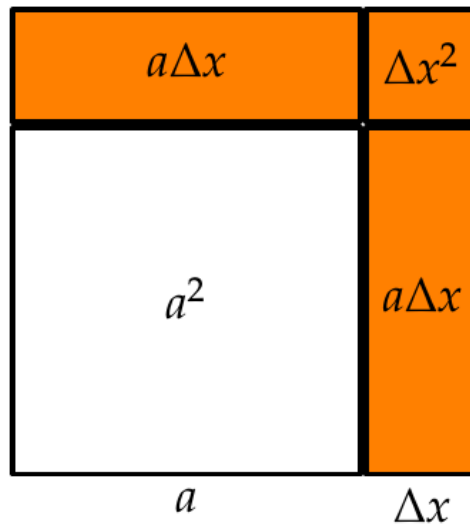


Figura 4.1: Variación que experimenta el área de un cuadrado al variar el lado

4.1.2 Interpretación geométrica de la tasa de variación media

i Nota

La tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ es la pendiente de la recta *secante* a f en los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.

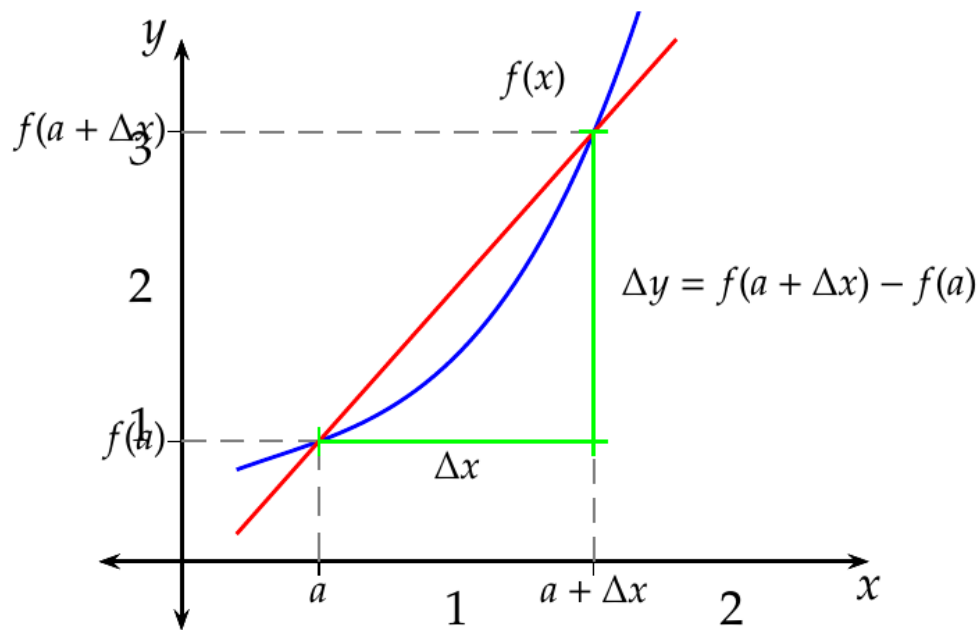


Figura 4.2: Gráfica de la recta secante a una función en dos puntos

4.1.3 Tasa de variación instantánea

En muchas ocasiones, es interesante estudiar la tasa de variación que experimenta una función, no en intervalo, sino en un punto.

Conocer la tendencia de variación de una función en un instante puede ayudarnos a predecir valores en instantes próximos.

Definición 4.3 (Tasa de variación instantánea y derivada). Dada una función $y = f(x)$, se llama *tasa de variación instantánea* de f en un punto a , al límite de la tasa de variación media de f en el intervalo $[a, a + \Delta x]$, cuando Δx tiende a 0, y lo notaremos

$$\begin{aligned} \text{TVI } f(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{TVM } f[a, a + \Delta x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función f es derivable en el punto a , y al valor del mismo se le llama derivada de f en a , y se nota como

$$f'(a) \text{ o bien } \frac{df}{dx}(a)$$

Ejemplo 4.2. Consideremos de nuevo la función $y = x^2$ que mide el área de un cuadrado de chapa metálica de lado x .

Si en un determinado instante el lado del cuadrado es a , y sometemos la chapa a un proceso de calentamiento que aumenta el lado del cuadrado, ¿cuál es la tasa de variación instantánea del área del cuadrado en dicho instante?

$$\begin{aligned}\text{TVI } f(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2a + \Delta x = 2a.\end{aligned}$$

Así pues,

$$f'(a) = 2a,$$

lo que indica que la tendencia de crecimiento del área es del doble del valor del lado.

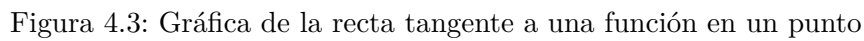
El signo de $f'(a)$ indica la tendencia de crecimiento de f en el punto a :

- $f'(a) > 0$ indica que la tendencia es creciente.
- $f'(a) < 0$ indica que la tendencia es decreciente.

4.1.4 Interpretación geométrica de la tasa de variación instantánea

i Nota

La tasa de variación instantánea de f en el punto a es la pendiente de la recta *tangente* a f en el punto $(a, f(a))$.



4.2.1 Movimiento rectilíneo

Figura 4.4: Interpretación cinemática del movimiento rectilíneo

También tiene sentido pensar en f como una función que mide otras magnitudes como

por ejemplo la temperatura de un cuerpo, la concentración de un gas o la cantidad de un compuesto en una reacción química en un instante t .

En este contexto, si se toman los instantes $t = t_0$ y $t = t_0 + \Delta t$, ambos del dominio I de f , define el vector

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

que se conoce como *velocidad media* de la trayectoria f entre los instantes t_0 y $t_0 + \Delta t$.

Ejemplo 4.3. Un vehículo realiza un viaje de Madrid a Barcelona. Sea f la función que da la posición del vehículo en cada instante. Si el vehículo parte de Madrid (km 0) a las 8 y llega a Barcelona (km 600) a las 14 horas, entonces la velocidad media del vehículo en el trayecto es

$$\mathbf{v}_m = \frac{f(14) - f(8)}{14 - 8} = \frac{600 - 0}{6} = 100 \text{ km/h.}$$

Siguiendo en este mismo contexto del movimiento rectilíneo, la derivada de f en el instante $t = t_0$ es el vector

$$\mathbf{v} = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

que se conoce, siempre que exista el límite, como *velocidad instantánea* o simplemente la *velocidad* de la trayectoria f en el instante t_0 .

Es decir, la derivada de la posición respecto del tiempo, es un campo de vectores que recibe el nombre de *velocidad a lo largo de la trayectoria f* .

Siguiendo con el ejemplo anterior, lo que marca el velocímetro en un determinado instante sería el módulo del vector velocidad en ese instante.

4.2.2 Generalización al movimiento curvilíneo

La derivada como velocidad a lo largo de una trayectoria en la recta real puede generalizarse a trayectorias en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Para el caso del plano real $\mathbb{R}^2$, si $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil en el plano en el instante t , tomando como referencia el origen de coordenadas O y los vectores coordenados $\{\mathbf{i} = (1, 0), \mathbf{j} = (0, 1)\}$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ cuyas coordenadas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

se conocen como *funciones coordenadas* de f y se escribe $f(t) = (x(t), y(t))$.

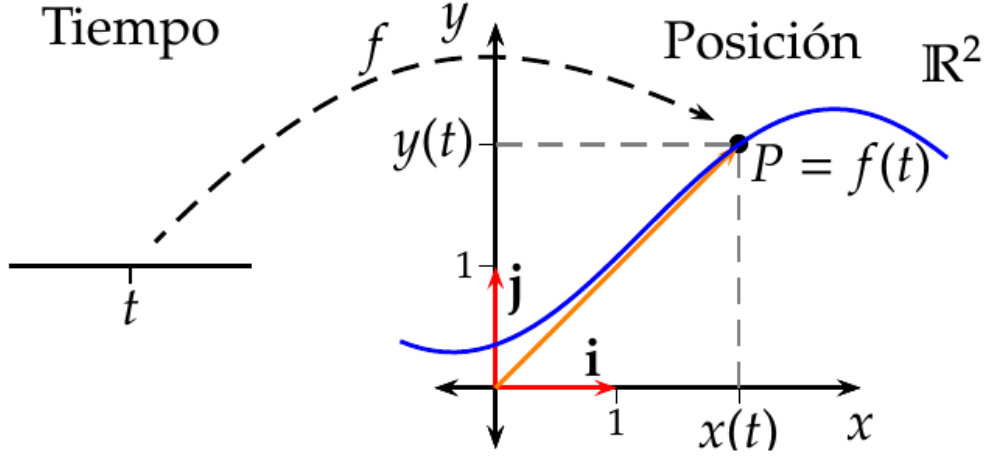


Figura 4.5: Interpretación cinemática del movimiento curvilíneo

4.2.2.1 Velocidad en una trayectoria curvilínea en el plano

En este contexto de una trayectoria $f(t) = (x(t), y(t))$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, para un instante $t = t_0$, si existe el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t},$$

entonces f es derivable en el instante $t = t_0$ y el vector $\mathbf{v} = f'(t_0)$ se conoce como *velocidad* de f en ese instante.

Como $f(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = (x'(t_0), y'(t_0)). \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{v} = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j}.$$

Ejemplo 4.4. Dada la trayectoria $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, sus funciones coordenadas son $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, y su velocidad es

$$\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

En el instante $t = \pi/4$, el móvil estará en la posición $f(\pi/4) = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y se moverá con una velocidad $\mathbf{v} = f'(\pi/4) = (-\sin(\pi/4), \cos(\pi/4)) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

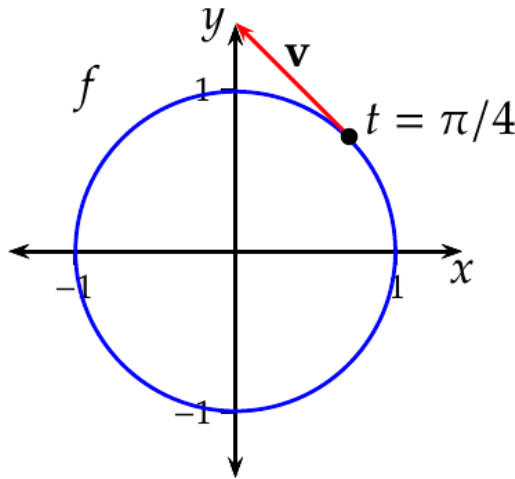


Figura 4.6: Trayectoria de la circunferencia

Obsérvese que el módulo del vector velocidad siempre será 1 ya que $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$.

4.3 Recta tangente a una trayectoria

4.3.1 Recta tangente a una trayectoria en el plano

Los vectores paralelos a la velocidad $\mathbf{v}$ se denominan *vectores tangentes* a la trayectoria f en el instante $t = t_0$, y la recta que pasa por $P = f(t_0)$ dirigida por $\mathbf{v}$ es la recta tangente a f cuando $t = t_0$.

Definición 4.4 (Recta tangente a una trayectoria). Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta tangente* a f para $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= f(t_0) + tf'(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0)) \\ &= (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Se ha visto que para la trayectoria $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, en el instante $t = \pi/4$ la posición del móvil era $f(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y su velocidad $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, de modo que la recta tangente a f en ese instante es

$$l : X = f(\pi/4) + t\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + t \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

De la ecuación vectorial de la recta tangente a f para $t = t_0$, se obtiene que sus funciones cartesianas son

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

y despejando t en ambas ecuaciones e igualando se llega a la ecuación cartesiana de la recta tangente

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)},$$

si $x'(t_0) \neq 0$ e $y'(t_0) \neq 0$, y de ahí a la ecuación en la forma punto-pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)).$$

Ejemplo 4.6. Partiendo de la ecuación vectorial de la tangente del ejemplo anterior $l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, su ecuación cartesiana es

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} &= \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow \\ y - \sqrt{2}/2 &= \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow \\ y &= -x + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4.3.2 Recta normal a una trayectoria en el plano

Se ha visto que la recta tangente a una trayectoria f cuando $t = t_0$ es la recta que pasa por el punto $P = f(t_0)$ dirigida por el vector velocidad $\mathbf{v} = f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Si en lugar de tomar ese vector se toma como vector director el vector $\mathbf{w} = (y'(t_0), -x'(t_0))$, que es ortogonal a $\mathbf{v}$, se obtiene otra recta que se conoce como *recta normal* a la trayectoria f cuando $t = t_0$.

Definición 4.5 (Recta normal a una trayectoria). Dada una trayectoria f sobre el plano real $\mathbb{R}^2$, se llama *recta normal* a f para $t = t_0$ a la recta de ecuación

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= (x(t_0), y(t_0)) + t(y'(t_0), -x'(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + ty'(t_0), y(t_0) - tx'(t_0)). \end{aligned}$$

Su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{-x'(t_0)},$$

y su ecuación en la forma punto pendiente

$$y - y(t_0) = \frac{-x'(t_0)}{y'(t_0)}(x - x(t_0)).$$



Advertencia

La recta normal es perpendicular a la recta tangente ya que sus vectores directores son ortogonales.

Ejemplo 4.7. Siguiendo con el ejemplo de la trayectoria $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, la recta normal en el instante $t = \pi/4$ es

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) + t(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \end{aligned}$$

y su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow y - \sqrt{2}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = x.$$

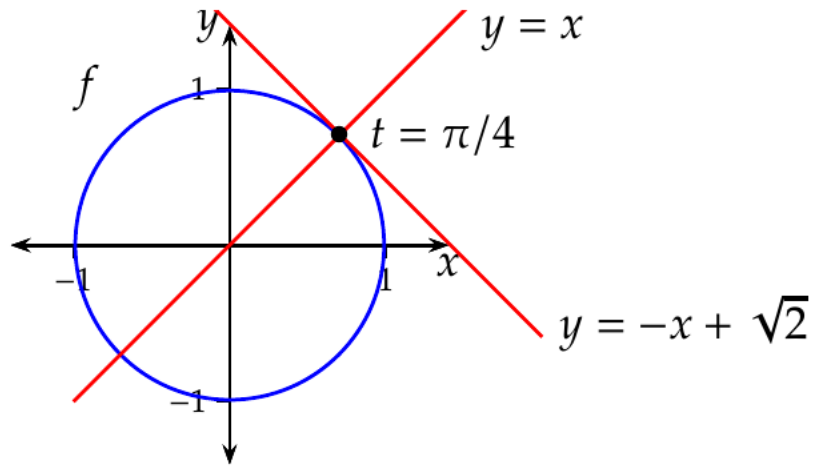


Figura 4.7: Tangente y normal a la trayectoria de una circunferencia

4.3.3 Rectas tangente y normal a una función

Un caso particular de las recta tangente y normal a una trayectoria son la recta tangente y normal a una función de una variable real. Si se tiene la función $y = f(x)$, $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, una trayectoria que traza la gráfica de f es

$$g(t) = (t, f(t)) \quad t \in I,$$

y su velocidad es

$$g'(t) = (1, f'(t)),$$

de modo que la recta tangente para $t = x_0$ es

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

y la recta normal es

$$\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1} \Rightarrow y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

Ejemplo 4.8. Dada la función $y = f(x) = x^2$, la trayectoria que dibuja la gráfica de esta función es $g(t) = (t, t^2)$ y su velocidad es $g'(t) = (1, 2t)$, de modo que en el punto $(1, 1)$, que se alcanza en el instante $t = 1$, la recta tangente es

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1,$$

y la recta normal es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow y-1 = \frac{-1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}.$$

4.3.4 Recta tangente a una trayectoria en el espacio

El concepto de recta tangente a una trayectoria en el plano real puede extenderse fácilmente a trayectorias en el espacio real $\mathbb{R}^3$.

Si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, es una trayectoria en el espacio real $\mathbb{R}^3$, entonces el móvil que recorre esta trayectoria en el instante $t = t_0$, ocupará la posición $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ y tendrá una velocidad $\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, de manera que la recta tangente a f en ese instante será

$$\begin{aligned} l : (x, y, z) &= (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) + t(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = \\ &= (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0), z(t_0) + tz'(t_0)), \end{aligned}$$

cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)},$$

siempre que $x'(t_0) \neq 0$, $y'(t_0) \neq 0$ y $z'(t_0) \neq 0$.

Ejemplo 4.9. Dada la trayectoria del espacio $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el instante $t = \pi/2$, la trayectoria pasará por el punto

$$f(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \pi/2) = (0, 1, \pi/2),$$

con una velocidad

$$\mathbf{v} = f'(\pi/2) = (-\sin(\pi/2), \cos(\pi/2), 1) = (-1, 0, 1),$$

y la tangente en ese punto es

$$l : (x, y, z) = (0, 1, \pi/2) + t(-1, 0, 1) = (-t, 1, t + \pi/2).$$

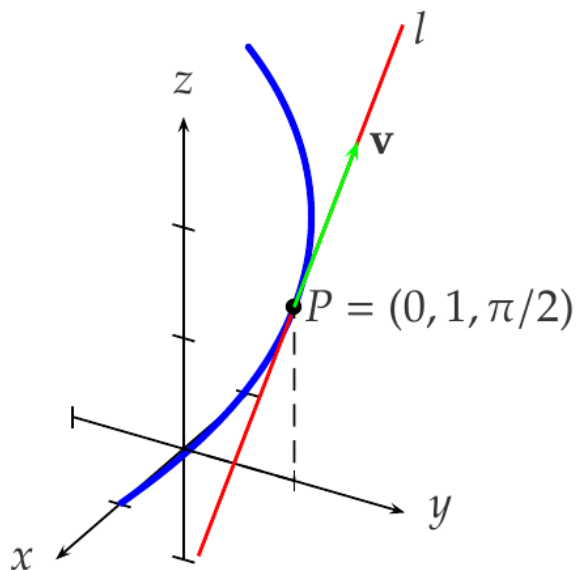


Figura 4.8: Gráfica de la tangente a una trayectoria en el espacio.



[Ejemplo interactivo](#)

4.4 Álgebra de derivadas

4.4.1 Propiedades de la derivada

Si $y = c$, es una función constante, entonces $y' = 0$.

Si $y = x$, es la función identidad, entonces $y' = 1$.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son dos funciones diferenciables, entonces

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4.5 Derivada de una función compuesta: La regla de la cadena

Teorema 4.1 (Regla de la cadena). Si $y = f \circ g$ es la composición de dos funciones $y = f(z)$ y $z = g(x)$, entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

Prueba. Resulta sencillo demostrarlo con la notación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

□

Ejemplo 4.10. Si $f(z) = \sin z$ y $g(x) = x^2$, entonces $f \circ g(x) = \sin(x^2)$ y, aplicando la regla de la cadena, su derivada vale

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos g(x)2x = \cos(x^2)2x.$$

Por otro lado, $g \circ f(z) = (\sin z)^2$ y, de nuevo aplicando la regla de la cadena, su derivada vale

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) = 2f(z) \cos z = 2 \sin z \cos z.$$

4.6 Derivada de la inversa de una función

Teorema 4.2 (Derivada de la función inversa). *Si $y = f(x)$ es una función y $x = f^{-1}(y)$ es su inversa, entonces*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Prueba. También resulta sencillo de demostrar con la notación diferencial

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

□

Ejemplo 4.11. La inversa de la función exponencial $y = f(x) = e^x$ es el logaritmo neperiano $x = f^{-1}(y) = \ln y$, de modo que para calcular la derivada del logaritmo podemos utilizar el teorema de la derivada de la inversa y se tiene

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

4.7 Estudio del crecimiento de una función

La principal aplicación de la derivada es el estudio del crecimiento de una función mediante el signo de la derivada.

Teorema 4.3. *Si f es una función cuya derivada existe en un intervalo I , entonces:*

- *Si $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$ entonces f es creciente en el intervalo I .*
- *Si $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$ entonces f es decreciente en el intervalo I .*

Ejemplo 4.12. La función $f(x) = x^3$ es creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) \geq 0$.

Advertencia

Una función puede ser creciente o decreciente en un intervalo y no tener derivada.

Ejemplo 4.13. Consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

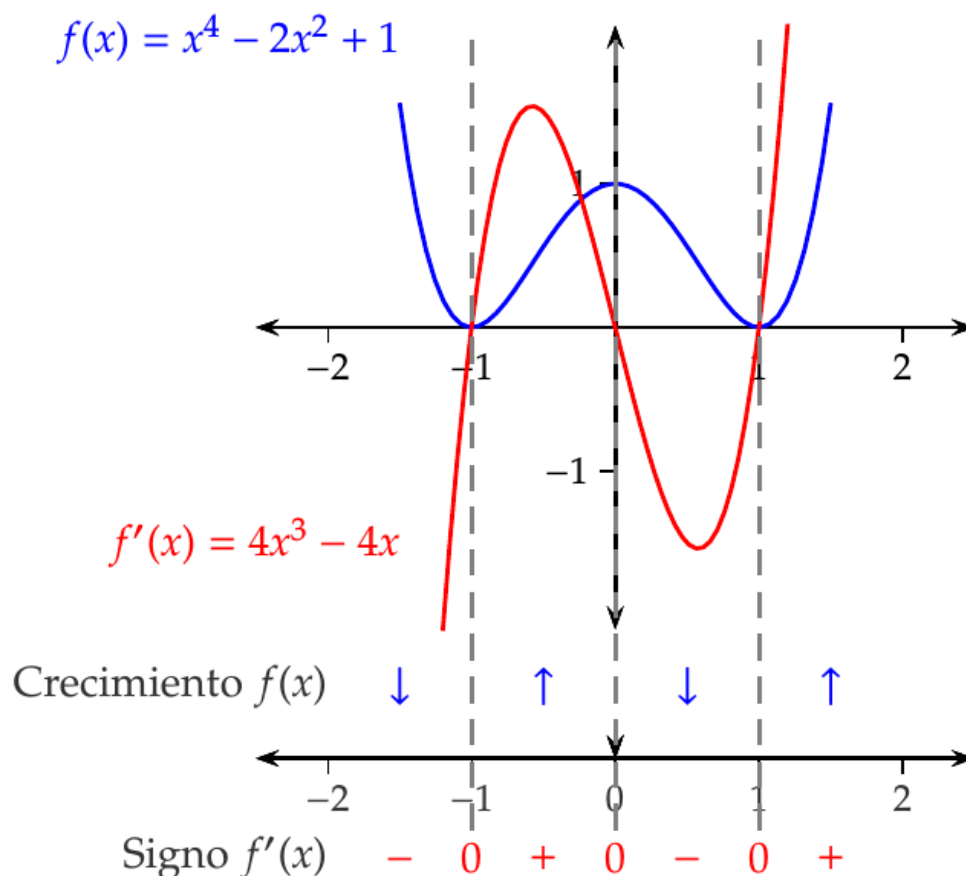


Figura 4.9: Estudio del crecimiento de una función

4.8 Determinación de los extremos relativos de una función

Como consecuencia del resultado anterior, la derivada también sirve para determinar los extremos relativos de una función.

Teorema 4.4 (Criterio de la primera derivada). *Sea f es una función cuya derivada existe en un intervalo I , y sea $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$, entonces:*

- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_0 .
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 .
- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) > 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) > 0$ entonces f tiene un punto de inflexión creciente en x_0 .

- Si existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) < 0$ y $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) < 0$ entonces f tiene un punto de inflexión decreciente en x_0 .

Los puntos donde se anula la derivada de una función se denominan puntos críticos.

Ejemplo 4.14. Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su derivada $f'(x) = 4x^3 - 4x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

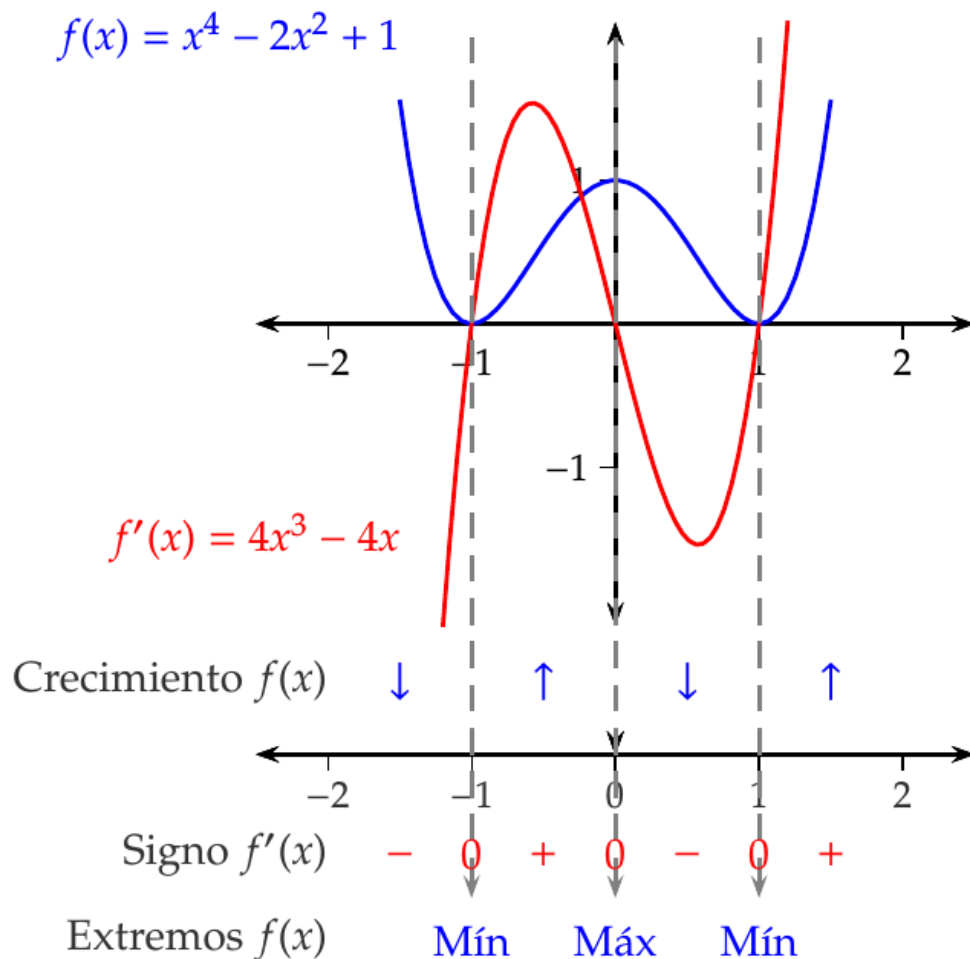


Figura 4.10: Estudio de los extremos de una función

4.9 Estudio de la concavidad de una función

La concavidad de una función puede estudiarse mediante el signo de la segunda derivada.

Teorema 4.5 (Criterio de la segunda derivada). *Si f es una función cuya segunda derivada existe en un intervalo I , entonces:*

- *Si $\forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$ entonces f es cóncava en el intervalo I .*
- *Si $\forall x \in I$ $f''(x) \leq 0$ entonces f es convexa en el intervalo I .*

Ejemplo 4.15. La función $f(x) = x^2$ tiene segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ y por tanto es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

 Advertencia

Una función puede ser cóncava o convexa en un intervalo y no tener derivada.

Ejemplo 4.16. Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Su segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 4$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua.

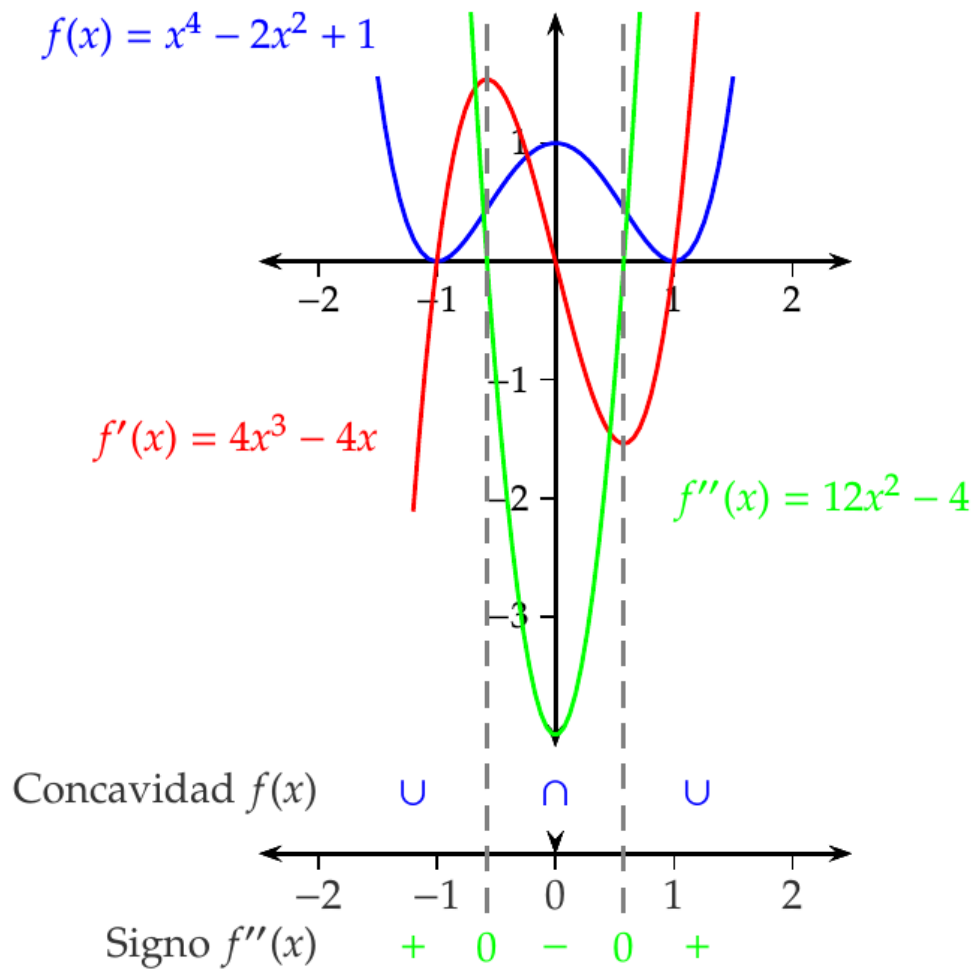


Figura 4.11: Estudio de la concavidad de una función

4.10 Polinomios de Taylor

4.10.1 Aproximación de una función mediante un polinomio

Una aplicación muy útil de la derivada es la aproximación de funciones mediante polinomios.

Los polinomios son funciones sencillas de calcular (mediante sumas y productos), que tienen muy buenas propiedades:

- Están definidos en todos los números reales.
- Son funciones continuas.
- Son derivables hasta cualquier orden y sus derivadas son continuas.

Objetivo. Aproximar una función $f(x)$ mediante un polinomio $p(x)$ cerca de un valor $x = x_0$.

4.10.1.1 Aproximación mediante un polinomio de grado 0

Un polinomio de grado 0 tiene ecuación

$$p(x) = c_0,$$

donde c_0 es una constante.

Como el polinomio debe valer lo que la función en el punto x_0 , debe cumplir

$$p(x_0) = c_0 = f(x_0).$$

En consecuencia, el polinomio de grado 0 que mejor aproxima a f en un entorno de x_0 es

$$p(x) = f(x_0).$$

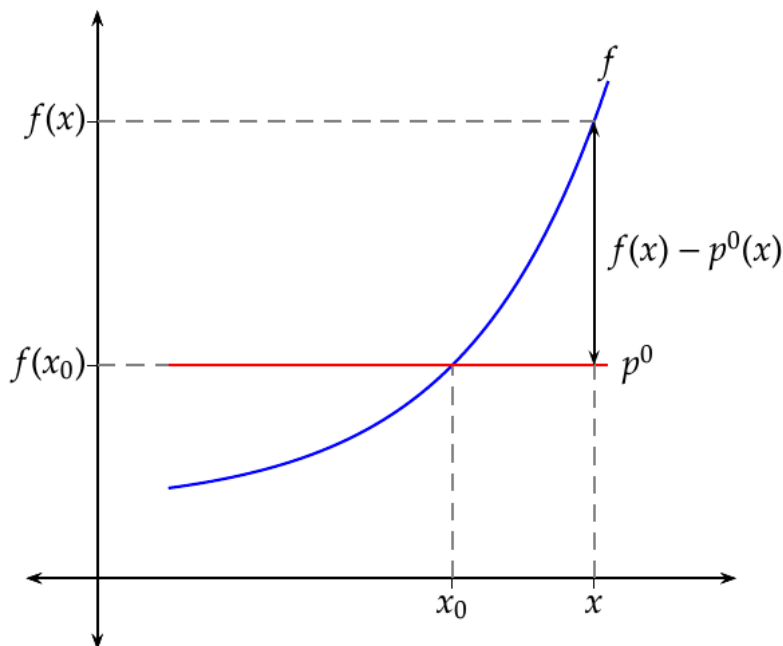


Figura 4.12: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 0

4.10.1.2 Aproximación mediante un polinomio de grado 1

Un polinomio de grado 1 es una recta y tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1x,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0).$$

De entre todos los polinomios de grado 1, el que mejor aproxima a f en entorno de x_0 será el que cumpla las dos condiciones siguientes:

- p y f valen lo mismo en x_0 : $p(x_0) = f(x_0)$,
- p y f tienen la misma tasa de crecimiento en a : $p'(x_0) = f'(x_0)$.

Esta última condición nos asegura que en un entorno de x_0 , p y f tienen aproximadamente la misma tendencia de crecimiento, pero requiere que la función f sea derivable en x_0 .

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

- $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) \Rightarrow p(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - x_0) = c_0 = f(x_0)$,
- $p'(x) = c_1 \Rightarrow p'(x_0) = c_1 = f'(x_0)$.

Así pues, el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f en un entorno de x_0 es

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

que resulta ser la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

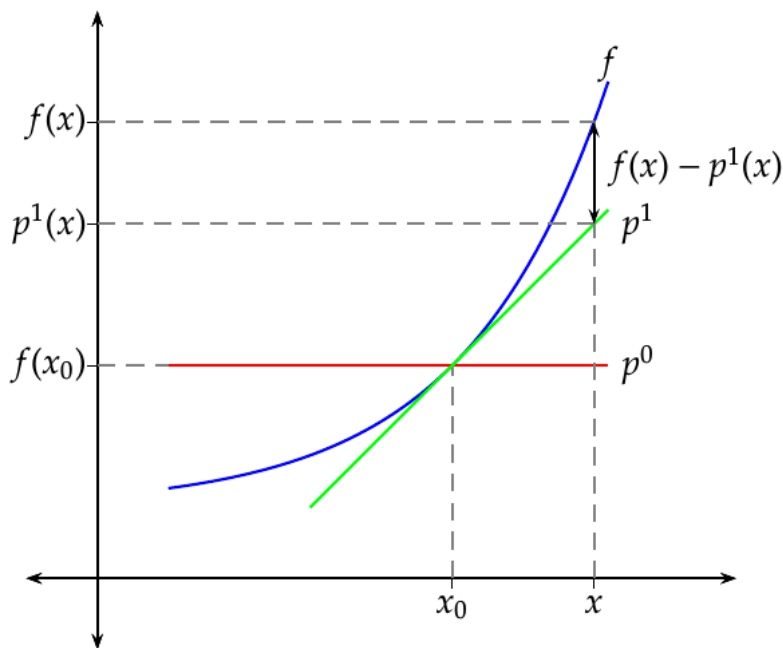


Figura 4.13: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 1

4.10.1.3 Aproximación mediante un polinomio de grado 2

Un polinomio de grado 2 es una parábola y tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2.$$

De entre todos los polinomio de grado 2, el que mejor aproxima a f en entorno de x_0 será el que cumpla las tres condiciones siguientes:

- p y f valen lo mismo en x_0 : $p(x_0) = f(x_0)$,
- p y f tienen la misma tasa de crecimiento en x_0 : $p'(x_0) = f'(x_0)$.
- p y f tienen la misma curvatura en x_0 : $p''(x_0) = f''(x_0)$.

Esta última condición requiere que la función f sea dos veces derivable en x_0 .

Imponiendo las condiciones anteriores tenemos

- $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 \Rightarrow p(x_0) = c_0 = f(x_0)$,

- $p'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) \Rightarrow p'(x_0) = c_1 + 2c_2(x_0 - x_0) = c_1 = f'(x_0)$,
- $p''(x) = 2c_2 \Rightarrow p''(x_0) = 2c_2 = f''(x_0) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$.

Así pues, el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a f en un entorno de x_0 es

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

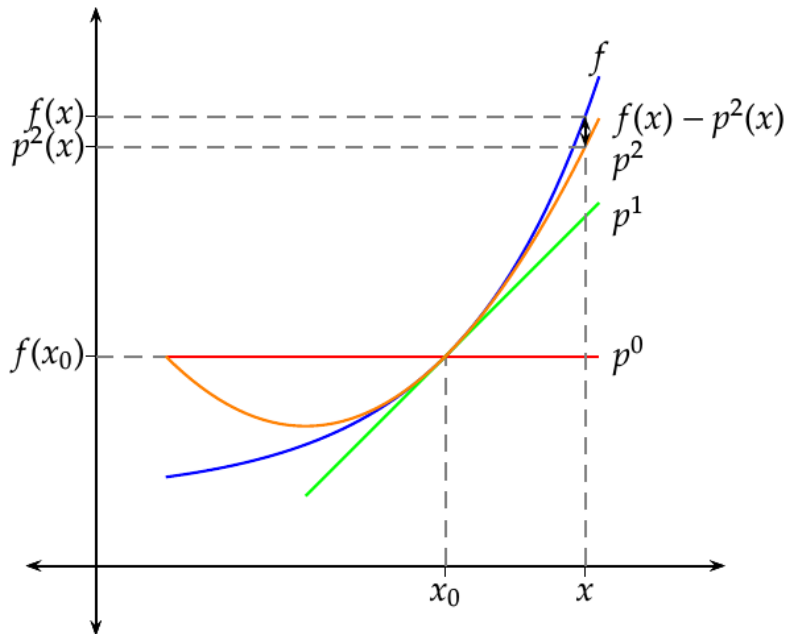


Figura 4.14: Gráfica del polinomio de Taylor de grado 2

4.10.1.4 Aproximación mediante un polinomio de grado n

Un polinomio de grado n tiene ecuación

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

aunque también puede escribirse

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n.$$

De entre todos los polinomios de grado n , el que mejor aproxima a f en un entorno de x_0 será el que cumpla las $n + 1$ condiciones siguientes:

- $p(x_0) = f(x_0)$,
- $p'(x_0) = f'(x_0)$,
- $p''(x_0) = f''(x_0)$,
- ...
- $p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

Las sucesivas derivadas de p valen

$$\begin{aligned}
 p(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n, \\
 p'(x) &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1}, \\
 p''(x) &= 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2}, \\
 &\vdots \\
 p^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots 1c_n = n!c_n.
 \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones anteriores se tiene

- $p(x_0) = c_0 + c_1(x_0 - x_0) + c_2(x_0 - x_0)^2 + \cdots + c_n(x_0 - x_0)^n = c_0 = f(x_0)$,
- $p'(x_0) = c_1 + 2c_2(x_0 - x_0) + \cdots + nc_n(x_0 - x_0)^{n-1} = c_1 = f'(x_0)$,
- $p''(x_0) = 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(x_0 - x_0)^{n-2} = 2c_2 = f''(x_0) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$,
- ...
- $p^{(n)}(x_0) = n!c_n = f^{(n)}(x_0) = c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Definición 4.6 (Polinomio de Taylor de orden n para f en el punto a). Dada una función f , n veces derivable en $x = x_0$, se define el *polinomio de Taylor* de orden n para f en x_0 como

$$\begin{aligned}
 p_{f,x_0}^n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i,
 \end{aligned}$$

o bien, escribiendo $x = x_0 + h$

$$\begin{aligned}
 p_{f,x_0}^n(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i.
 \end{aligned}$$

i Nota

El polinomio de Taylor de orden n para f en x_0 es el polinomio de orden n que mejor aproxima a f alrededor de x_0 , ya que es el único que cumple las $n + 1$ condiciones anteriores.

Ejemplo 4.17. Vamos a aproximar la función $f(x) = \log x$ en un entorno del punto 1 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Taylor de orden 3 para f en el punto 1 es

$$p_{f,1}^3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Calculamos las tres primeras derivadas de f en 1:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \log x & f(1) = \log 1 = 0, \\ f'(x) = 1/x & f'(1) = 1/1 = 1, \\ f''(x) = -1/x^2 & f''(1) = -1/1^2 = -1, \\ f'''(x) = 2/x^3 & f'''(1) = 2/1^3 = 2. \end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio se tiene

$$p_{f,1}^3(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}.$$

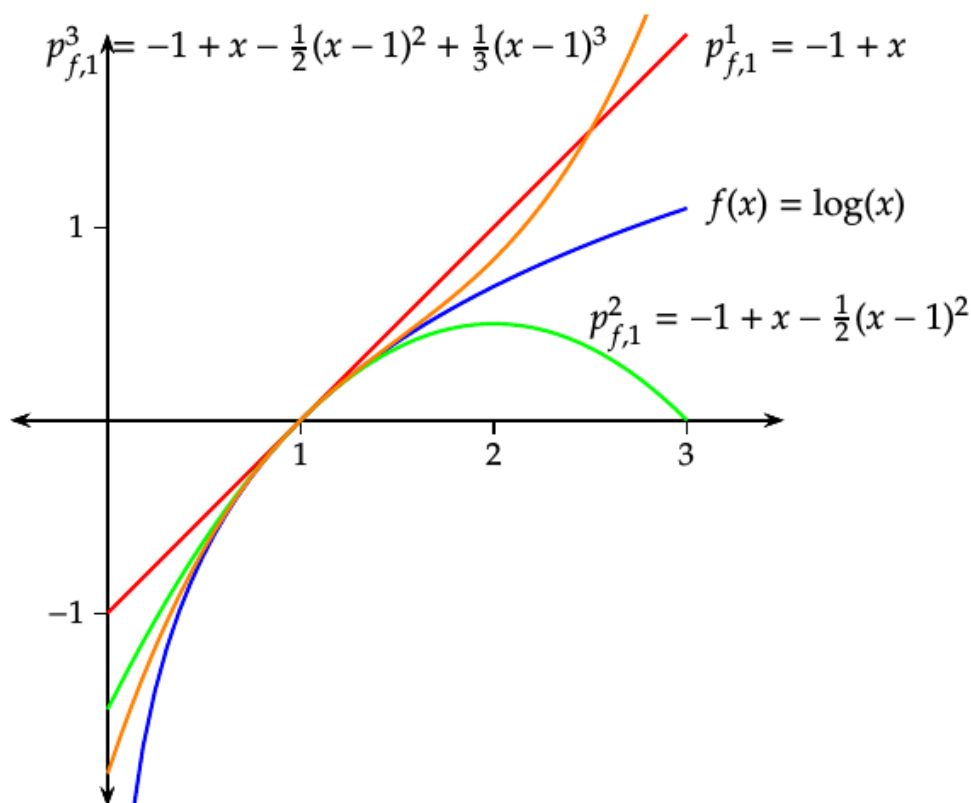


Figura 4.15: Gráfica del polinomio de Taylor del logaritmo

4.10.2 Polinomio de Maclaurin de orden n

La ecuación del polinomio de Taylor se simplifica cuando el punto en torno al cual queremos aproximar es el 0.

Definición 4.7 (Polinomio de Maclaurin de orden n para f). Dada una función f , n veces derivable en 0, se define el *polinomio de Maclaurin* de orden n para f como

$$\begin{aligned} p_{f,0}^n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.18. Vamos a aproximar la función $f(x) = \sin x$ en un entorno del punto 0 mediante un polinomio de grado 3.

La ecuación del polinomio de Maclaurin de orden 3 para f es

$$p_{f,0}^3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Calculamos las tres primeras derivadas de f en 0:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0, \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = \cos 0 = 1, \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0, \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -\cos 0 = -1. \end{array}$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio obtenemos

$$p_{f,0}^3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

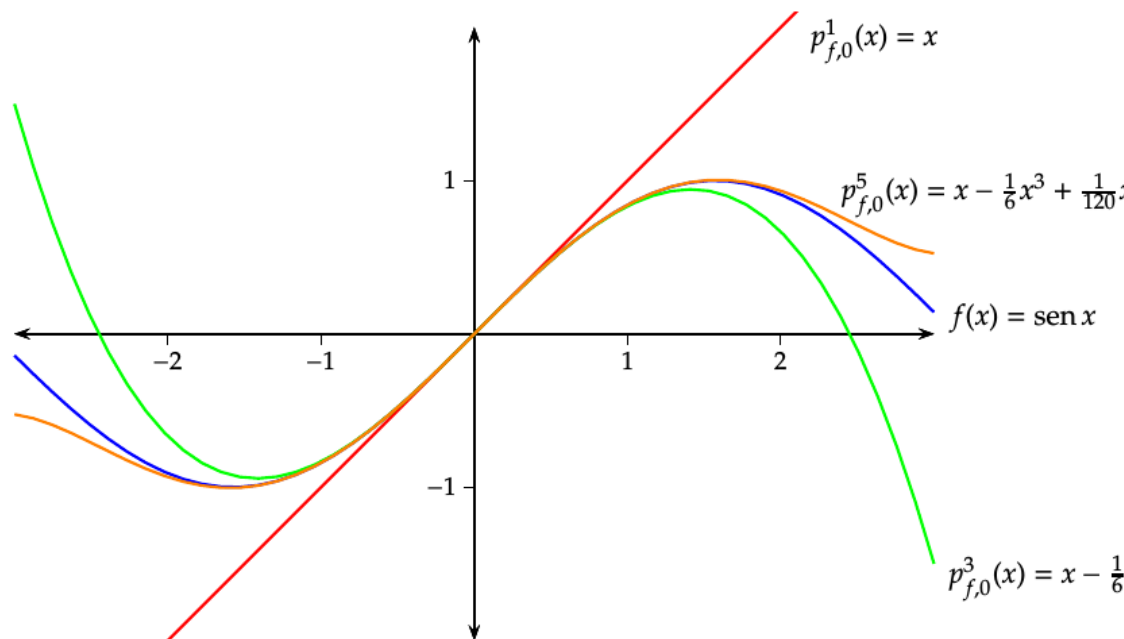


Figura 4.16: Gráfica del polinomio de Maclaurin del seno

4.10.3 Polinomios de Maclaurin de funciones elementales

$f(x)$	$p_{f,0}^n(x)$
$\operatorname{sen} x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k - 1$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ si $n = 2k$ o $n = 2k + 1$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}$ si $n = 2k$ o $n = 2k - 1$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

4.10.4 Resto de Taylor

Los polinomios de Taylor permiten calcular el valor aproximado de una función cerca de un valor x_0 , pero siempre se comete un error en dicha aproximación.

Definición 4.8 (Resto de Taylor). Si f es una función para la que existe su polinomio de Taylor de orden n en x_0 , p_{f,x_0}^n , entonces se define el *resto de Taylor* de orden n para f en x_0 como

$$r_{f,x_0}^n(x) = f(x) - p_{f,x_0}^n(x).$$

El resto mide el error cometido al aproximar $f(x)$ mediante $p_{f,x_0}^n(x)$ y permite expresar la función f como la suma de un polinomio de Taylor más su resto correspondiente:

$$f(x) = p_{f,x_0}^n(x) + r_{f,x_0}^n(x).$$

Esta expresión se conoce como *fórmula de Taylor* de orden n para f en x_0 . Se puede demostrar, además, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{f,x_0}^n(x_0 + h)}{h^n} = 0,$$

lo cual indica que el resto $r_{f,x_0}^n(x_0 + h)$ es mucho menor que h^n .

5 Cálculo integral

5.1 Primitiva de una función

Definición 5.1 (Primitiva de una función). Se dice que la función $F(x)$ es una *función primitiva* de $f(x)$ si se verifica que $F'(x) = f(x) \forall x \in \text{Dom}(f)$.

Ejemplo 5.1. La función $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$ ya que $F'(x) = 2x$ para todo $\mathbb{R}$.

El cálculo de primitivas puede verse como un proceso inverso al cálculo de derivadas, y es por eso que también se suele llamar *antiderivada* a la primitiva de una función.

5.1.1 Integral indefinida de una función

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ también lo será toda función de la forma $F(x) + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$, de manera que si una función tiene primitiva, tiene infinitas primitivas que se obtienen añadiendo una constante a cualquiera de ellas.

Definición 5.2 (Integral indefinida). Se llama *función integral indefinida* de la función f al conjunto de todas sus funciones primitivas y se representa como

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$ y C una constante arbitraria.

Ejemplo 5.2. La integral indefinida de $f(x) = 2x$ es

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

5.1.2 Interpretación de la integral

En temas anteriores se vio que la derivada de una función es la tasa de variación instantánea, de manera que si conocemos la tasa de variación instantánea de una función en cada instante, podemos averiguar la variación real de la función.

Ejemplo 5.3. ¿Cuál será el espacio recorrido por un objeto en caída libre?

Cuando soltamos cualquier objeto desde una altura, la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad, con una aceleración aproximada de 9.8 m/s^2 , esto quiere decir que la velocidad varía de forma constante y por tanto la velocidad del objeto en cada instante t será:

$$v(t) = 9.8t \text{ m/s.}$$

Puesto que la velocidad en cada instante es la tasa de variación instantánea del espacio recorrido por el objeto, su primitiva nos dará el espacio recorrido por el objeto en cada instante:

$$e(t) = \int 9.8t \, dt = 9.8 \frac{t^2}{2}.$$

Así, por ejemplo, a los 2 segundos, el espacio recorrido será $e(2) = 9.8 \frac{2^2}{2} = 19.6 \text{ m}$.

5.1.3 Linealidad de la integral

Dadas dos funciones f y g que admiten primitiva, y una constante $k \in \mathbb{R}$ se verifica que

1. $\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx,$
2. $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx.$

5.2 Integrales inmediatas

- $\int a \, dx = ax + C$, con a constante.
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$.
- $\int e^x \, dx = e^x + C$.
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
- $\int \sen x \, dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x \, dx = \sen x + C$.

- $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + C.$
- $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$
- $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cotg x| + C.$
- $\int \cotg x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$
- $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C.$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotg x + C.$
- $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C.$
- $\int \operatorname{cosec} x \cotg x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$

5.3 Técnicas de integración

Desgraciadamente, y a diferencia del cálculo de derivadas, no existe un procedimiento infalible que permita calcular la primitiva de una función siempre que exista. Existen no obstante, diferentes técnicas para integrar algunos tipos de funciones. Las técnicas más habituales son:

- Integración por partes
- Integración por reducción
- Integración por cambio de variable
- Integración de funciones racionales
- Integración de funciones trigonométricas

5.3.1 Integración por partes

Teorema 5.1 (Integración por partes). *Dadas f y g , dos funciones derivables de x ,*

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) \, dx,$$

o con notación diferencial, si u y v son funciones derivables de x

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Prueba. De la regla de la derivada del producto se tiene

$$(uv)' = u'v + uv'$$

y calculando la integral a ambos lados se llega a

$$\begin{aligned}\int (uv)' dx &= \int u'v dx + \int uv' dx \Rightarrow \\ uv &= \int v du + \int u dv \Rightarrow \\ \int u dv &= uv - \int v du.\end{aligned}$$

□

Al emplear el método de integración por partes se debe realizar la elección de u y dv de tal forma que las integrales que haya que realizar sean lo más sencillas posibles.

Ejemplo 5.4. Para integrar $\int x \sen x dx$ se deberá elegir $u = x$ y $dv = \sen x dx$, con lo que $du = dx$ y $v = -\cos x$, resultando

$$\int x \sen x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sen x.$$

Si hubiésemos elegido $u = \sen x$ y $dv = x dx$, la cosa se complica.

5.3.2 Integración por reducción

Las fórmulas de reducción permiten simplificar el cálculo cuando hay que aplicar la integración por partes varias veces consecutivas.

Si se tiene que calcular una integral indefinida I_n que depende de un número natural n , las fórmulas de reducción nos permitirán expresar I_n en función de I_{n-1} , es decir se obtendrá una relación recurrente del tipo

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n)$$

con lo que calculando una integral se pueden obtener fácilmente las demás.

Ejemplo 5.5. Si se desea calcular $I_n = \int x^n e^x dx$, aplicando la integración por partes se debe elegir $u = x^n$ y $dv = e^x dx$, con lo que $du = nx^{n-1} dx$ y $v = e^x$, obteniéndose

$$I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n I_{n-1}.$$

Así, por ejemplo, para $n = 3$ se tiene

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(xe^x - I_0)) = \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6).\end{aligned}$$

5.3.3 Integración por cambio de variable

Consejo

La regla de la cadena establece que la derivada de una función compuesta $f(g(x))$ es

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x),$$

de manera que es posible integrar esta última expresión haciendo un cambio de variable $u = g(x)$ de manera que $du = g'(x)dx$:

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du = f(u) + C = f(g(x)) + C.$$

Ejemplo 5.6. Para calcular la integral $\int \frac{1}{x \log x} dx$ puede hacerse el cambio de variable $u = \log x$ con lo que $du = \frac{1}{x} dx$ y sustituyendo queda

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{1}{\log x} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u} du = \log |u| + C,$$

y deshaciendo el cambio tenemos

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \log |\log x| + C.$$

5.3.4 Integración de funciones racionales

5.3.4.1 Descomposición en fracciones simples

Toda función racional se puede escribir como suma de un polinomio (que tiene primitiva inmediata) más una función racional propia, es decir, una función racional en la que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. A su vez, toda función racional propia puede expresarse como suma de fracciones simples de los tipos siguientes:

$$\begin{array}{ll}
\frac{A}{(x-a)} & : \text{ con raíces reales simples del denominador.} \\
\frac{A}{(x-a)^n} & : \text{ con raíces reales múltiples del denominador.} \\
\frac{Ax+B}{x^2+cx+d} & : \text{ con raíces complejas simples del denominador.} \\
\frac{Ax+B}{(x^2+cx+d)^n} & : \text{ con raíces complejas múltiples del denominador.}
\end{array}$$

con $n > 1$.

5.3.4.2 Primitivas de fracciones simples

Usando la linealidad de la integral, basta calcular la primitiva de cada una de estas fracciones simples para calcular la primitiva de la función racional:

$$\begin{aligned}
\int \frac{A}{x-a} dx &= A \log |x-a| + C, \\
\int \frac{A}{(x-a)^n} dx &= \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1. \\
\int \frac{Ax+B}{x^2+cx+d} dx &= \frac{A}{2} \log |x^2+cx+d| + \frac{2B-Ac}{\sqrt{4d-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+c}{\sqrt{4d-c^2}} + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7 (Raíces reales). Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}$. Su denominador se puede factorizar como $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ por lo que tiene una raíz simple -2 y una raíz múltiple 1.

La descomposición en fracciones simples es:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \\
&= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x + (-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}
\end{aligned}$$

e igualando los numeradores tenemos $A = 16/9$, $B = -1/3$ y $C = -7/9$, de modo que

$$\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} = \frac{16/9}{x-1} + \frac{-1/3}{(x-1)^2} + \frac{-7/9}{x+2}.$$

Finalmente, integrando tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 3x - 5}{x^3 - 3x + 2} dx &= \int \frac{16/9}{x-1} dx + \int \frac{-1/3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-7/9}{x+2} dx = \\ &= \frac{16}{9} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int (x-1)^{-2} dx - \frac{7}{9} \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= \frac{16}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{7}{9} \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8 (Raíces imaginarias). Consideremos la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+8}$.

En este caso el denominador no tiene raíces reales, pero puede escribirse de la forma

$$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4.$$

Integrando, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{x-2+3}{(x-2)^2+4} dx = \\ &= \int \frac{x-2}{(x-2)^2+4} dx + \int \frac{3}{(x-2)^2+4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln|(x-2)^2+4| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

5.3.5 Integración de funciones trigonométricas

5.3.5.1 Función $\sin^n x \cos^m x$ con n o m impares

Consejo

Si $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ con n o m impares, entonces para integrar esta función se hace el cambio $\sin x = t$ o $\cos x = t$.

Ejemplo 5.9.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx,$$

y haciendo el cambio $t = \sin x$, de modo que $dt = \cos x dx$, se tiene

$$\int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int t^2 (1 - t^2) \, dt = \int t^2 - t^4 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C,$$

y deshaciendo el cambio anterior se obtiene

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

5.3.5.2 Función $\sin^n x \cos^m x$ con n y m pares

Consejo

Si $f(x) = \sin^n x \cos^m x$ con n y m pares, entonces se suelen utilizar las siguientes igualdades para facilitar el cálculo de la integral:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x\end{aligned}$$

Ejemplo 5.10.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx,\end{aligned}$$

siendo la primera integral de este mismo tipo y la segunda del anterior, con lo que

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

5.3.5.3 Productos de senos y cosenos

Consejo

Las igualdades

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y))$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

transforman los productos en sumas, simplificando su integración.

Ejemplo 5.11.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x - 2x) + \operatorname{sen}(x + 2x)) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(-x) \, dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cos(-x) - \frac{1}{6} \cos 3x + C.\end{aligned}$$

5.3.5.4 Funciones racionales de senos y cosenos

Consejo

Si $f(x, y)$ es una función racional entonces la función $f(\operatorname{sen} x, \cos x)$ puede convertirse en una función racional en t mediante los cambios

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Ejemplo 5.12.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \, dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \log |t| + C = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5.4 Integral definida

Definición 5.3 (Integral definida). Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si se divide este intervalo en n subintervalos de igual amplitud Δx y se elige un punto

cualquiera x_i de cada subintervalo, la *integral definida* de f desde a hasta b se define como el límite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

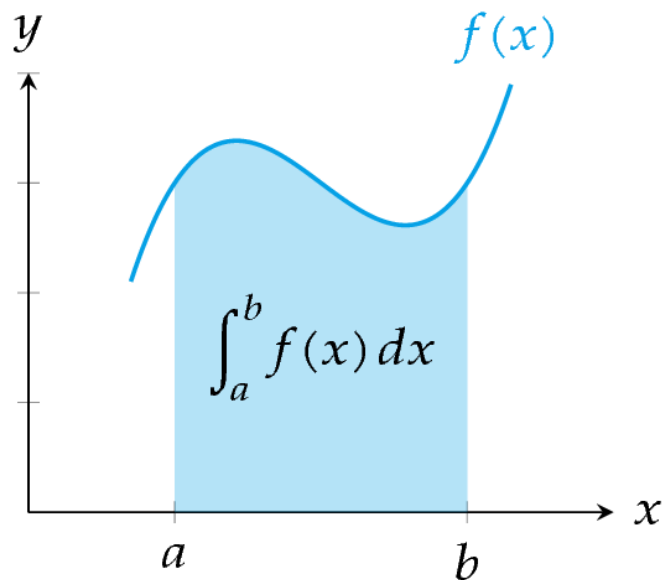


Figura 5.1: Sumas de Riemann

Teorema 5.2 (Primer teorema fundamental de Cálculo). *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es la primitiva de f en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 5.13. Dada la función $f(x) = x^2$, se tiene

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

5.4.1 Propiedades de la integral definida

Dadas dos funciones f y g integrables en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (linealidad)
- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (linealidad)
- $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ si $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ (monotonía)
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ para cualquier $c \in (a, b)$ (aditividad)
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

5.5 Cálculo de áreas

5.5.1 Área delimitada por una función positiva y el eje de abscisas

Si f es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, entonces la integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

mide el área que queda entre el gráfico de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a, b]$.

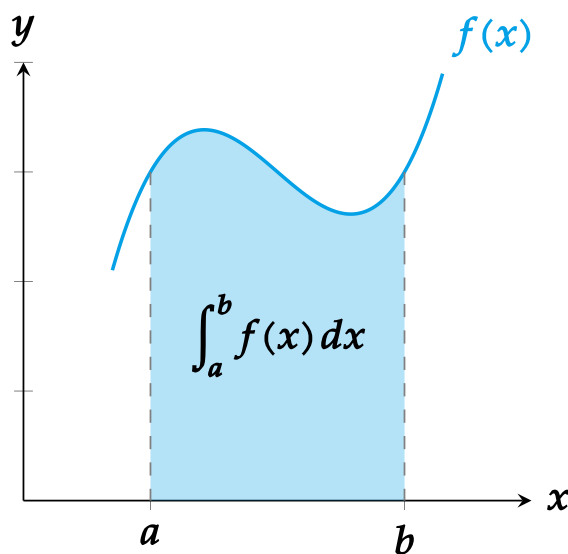


Figura 5.2: Área delimitada por el gráfico de una función positiva entre la función y el eje X en un intervalo

5.5.2 Área delimitada por una función negativa y el eje de abscisas

Si f es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$, entonces el área que queda entre el gráfico de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a, b]$ es

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

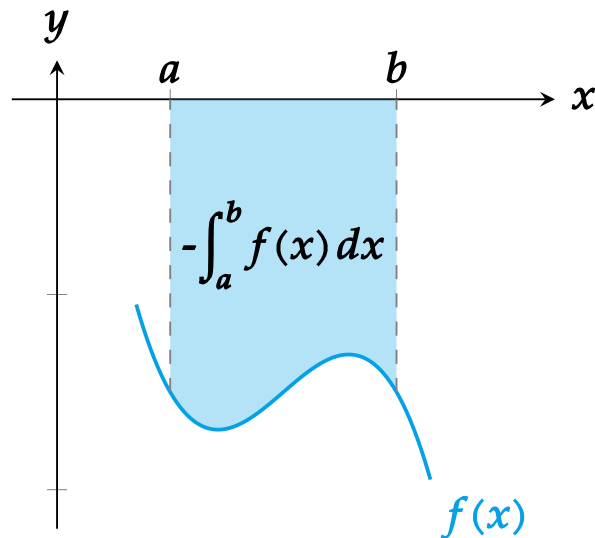


Figura 5.3: Área delimitada por el gráfico de una función negativa entre la función y el eje X en un intervalo

5.5.3 Área delimitada por una función y el eje de abscisas

En general, si $f(x)$ es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, no importa el signo de f en $[a, b]$, el área entre el gráfico de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[a, b]$ es

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

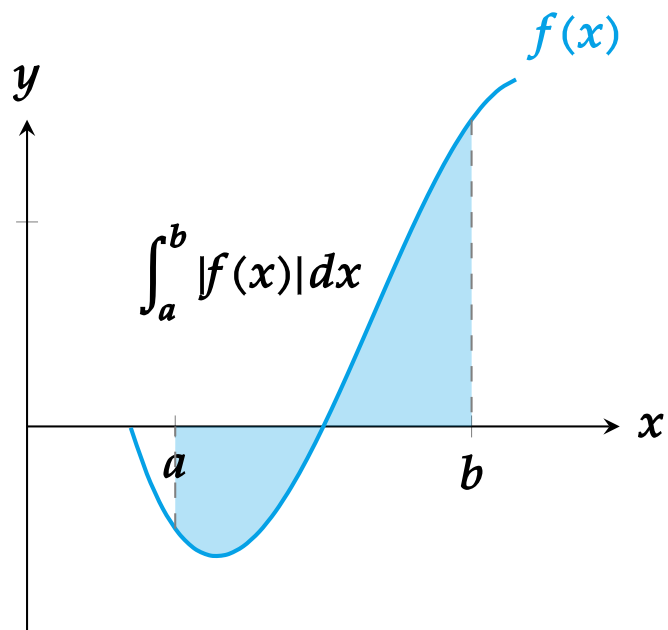


Figura 5.4: Área delimitada por el gráfico de una función y el eje X en un intervalo

5.5.4 Área delimitada por dos funciones

Si f y g son dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, entonces el área limitada por los gráficos de f y g en el intervalo $[a, b]$ es

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

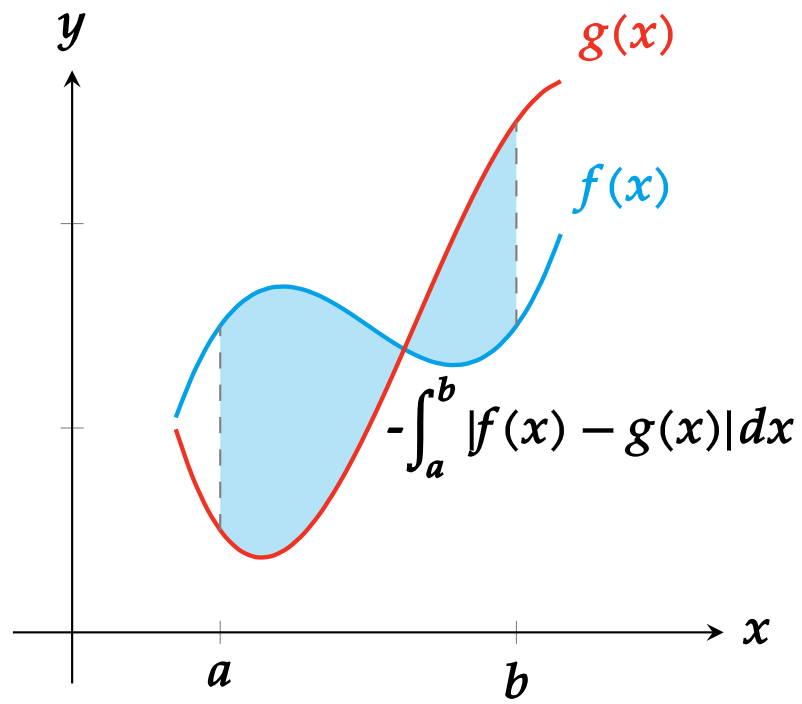


Figura 5.5: Área delimitada por el gráfico de dos funciones en un intervalo

6 Ecuaciones diferenciales ordinarias

6.1 Definición de las ecuaciones diferenciales ordinarias

En muchos problemas de geometría, física, química, etc, se presentan a menudo ecuaciones que relacionan una función con su derivada o derivadas sucesivas.

Definición 6.1 (Ecuación diferencial ordinaria). Se llama *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) a una ecuación que relaciona una variable independiente x , una función desconocida $y(x)$, y las derivadas de y de diversos órdenes $y', y'', \dots, y^{(n)}$; es decir una expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Se llama *orden* de la ecuación diferencial al mayor de los órdenes de las derivadas que contienen la ecuación.

Ejemplo 6.1. La ecuación $y''' + \sin(x)y' = 2x$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

6.1.1 Deducción de una ecuación diferencial

Para deducir la ecuación diferencial que explica un fenómeno es fundamental saber interpretar las derivadas de una función.

Ejemplo 6.2. Una de las leyes de la termodinámica de Newton dice

“La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia de temperatura T del cuerpo y la temperatura T_a del aire.”

La velocidad de enfriamiento es la variación instantánea de la temperatura con respecto al tiempo, es decir, la derivada de la temperatura con respecto al tiempo dT/dt . Por tanto, el fenómeno anterior puede describirse mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

6.1.2 Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Definición 6.2 (Solución de una ecuación diferencial ordinaria). Se llama *solución de una ecuación diferencial ordinaria* $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ a cualquier función $y = f(x)$ tal que al sustituirla en la ecuación la convierte en una igualdad; es decir

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

La gráfica de la solución de una ecuación diferencial ordinaria se llama *curva integral*.

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria consiste en hallar todas sus soluciones en un dominio dado. Para ello, habrá que recurrir al cálculo integral.

De igual modo que al integrar una función aparece una constante que nos da la familia de primitivas de la función, al integrar una ecuación diferencial ordinaria surgen varias constantes arbitrarias. Dando valores a dichas constantes se obtienen todas las soluciones de la ecuación.

Definición 6.3 (Solución general de una E.D.O.). Se llama *solución general de una ecuación diferencial ordinaria* de orden n , a una función de la forma

$$y = f(x, C_1, \dots, C_n)$$

que es solución de la ecuación diferencial para cualquier valor que tomen las constantes $C_1, \dots, C_n$.

Para cada valor que tomen las constantes se obtiene una *solución particular* de la ecuación diferencial. Por ello, una E.D.O. tiene infinitas soluciones.

Geoméricamente, la solución general representa una familia de curvas integrales de la ecuación diferencial.

A menudo, se suelen imponer condiciones para reducir el número de soluciones de la ecuación diferencial. En muchos casos estas condiciones permiten fijar los valores de las constantes y así obtener una solución particular a partir de la solución general.

6.1.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Vamos a estudiar la resolución de E.D.O. de primer orden,

$$F(x, y, y') = 0.$$

La solución general de una E.D.O. de primer orden es

$$y = f(x, C),$$

de manera que para obtener una solución particular de la ecuación basta con darle valor a la constante C , y para ello es suficiente con fijar una condición inicial.

Definición 6.4 (Problema del valor inicial). Al conjunto formado por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y una condición inicial se le llama *problema del valor inicial*:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, & \text{Ecuación diferencial de primer orden;} \\ y(x_0) = y_0, & \text{Condición inicial.} \end{cases}$$

Resolver un problema del valor inicial consiste en encontrar una solución de la ecuación diferencial que cumpla la condición inicial.

Ejemplo 6.3. Recordemos la ecuación diferencial de primer orden que explicaba el enfriamiento de un cuerpo en el aire:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

donde T es la temperatura del cuerpo y T_a la del aire.

Es fácil comprobar que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$T(t) = Ce^{kt} + T_a.$$

Si imponemos la condición inicial de que en el instante inicial el cuerpo estaba a 5 °C, es decir, $T(0) = 5$, tenemos

$$T(0) = Ce^{k \cdot 0} + T_a = C + T_a = 5,$$

de donde se deduce que $C = 5 - T_a$, y esto nos lleva a la solución particular

$$T(t) = (5 - T_a)e^{kt} + T_a.$$

Por último, en el caso de que la temperatura del aire fuese $T_a = 0$ °C y $k = 1$, la solución general de la ecuación sería

$$T(t) = Ce^t,$$

lo que nos daría la siguiente familia de curvas integrales

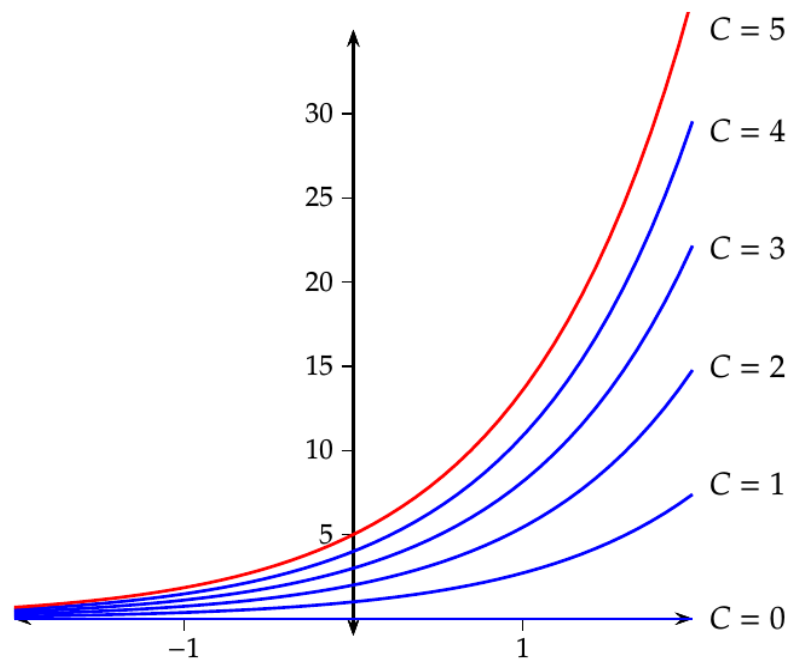


Figura 6.1: Gráficas de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria

de las cuales, la solución del problema del valor inicial es la función cuya gráfica pasa por el punto $(0, 5)$.

6.1.4 Existencia y unicidad de soluciones

Teorema 6.1 (Existencia y unicidad de la solución de una E.D.O.). *Dado un problema del valor inicial*

$$\begin{cases} y' = F(x, y); \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

si $F(x, y(x))$ es una función continua en un intervalo abierto alrededor del punto (x_0, y_0) , entonces existe una solución del problema del valor inicial. Si, además, $\frac{\partial F}{\partial y}$ es continua en un intervalo abierto alrededor de (x_0, y_0) , la solución es única.

Aunque este teorema nos garantiza la existencia y la unicidad de las soluciones no nos proporciona un método para llegar a ellas.

En realidad, no existe un método general para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden pero veremos cómo resolver algunos tipos especiales de ellas:

- De variables separables,
- Homogéneas,
- Lineales.

6.2 E.D.O. de variables separables

Definición 6.5 (E.D.O. de variables separables). Una *ecuación diferencial ordinaria de variables separables* es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y'g(y) = f(x),$$

o lo que es lo mismo,

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

de manera que a un lado de la igualdad sólo aparece la variable y y al otro la variable x (las variables están separadas).



Consejo

La solución general de esta ecuación diferencial se obtiene integrando ambos lados de la igualdad

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$$

Ejemplo 6.4. La ecuación diferencial que explica el enfriamiento de un cuerpo en el aire

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a),$$

es una ecuación diferencial de variables separables ya que puede escribirse

$$\frac{1}{T - T_a} dT = k dt.$$

Integrando ambos miembros de la igualdad tenemos

$$\int \frac{1}{T - T_a} dT = \int k dt \Leftrightarrow \log(T - T_a) = kt + C,$$

y despejando T llegamos a la solución general de la ecuación

$$T(t) = e^{kt+C} + T_a = e^C e^{kt} + T_a = C e^{kt} + T_a,$$

reescribiendo $C = e^C$ como una constante arbitraria.

6.3 E.D.O. homogéneas

Definición 6.6 (Función homogénea). Una función $f(x, y)$ es *homogénea* de grado n , si para cualquier valor k se cumple

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y).$$

En particular, para una función homogénea de grado 0 siempre se cumple

$$f(kx, ky) = f(x, y).$$

En concreto, si tomamos $k = 1/x$ tenemos

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

de manera que una función homogénea de grado 0 siempre puede escribirse como una función de $u = y/x$:

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(u).$$

Definición 6.7 (E.D.O. homogénea). Una ecuación diferencial ordinaria homogénea es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y' = f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 0.

 Consejo

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene realizando el cambio de variable

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux,$$

con lo que la ecuación diferencial anterior se convierte en

$$u'x + u = f(u),$$

que es de variables separables.

Una vez resuelta la ecuación diferencial anterior, sólo queda deshacer el cambio de variable.

Ejemplo 6.5. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0.$$

Escribiéndola de la forma

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$$

se puede ver fácilmente que es homogénea.

Para resolverla hacemos el cambio de variable $y = ux$ y se obtiene

$$u'x + u = \frac{3ux - 4x}{2ux - 3x} = \frac{3u - 4}{2u - 3}$$

que es de variables separables, y separando las variables se llega a

$$u'x = \frac{3u - 4}{2u - 3} - u = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3} \Leftrightarrow \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4} du = \frac{1}{x} dx.$$

Integrando ahora ambos miembros obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4} du &= \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log |u^2 - 3u + 2| = \log |x| + C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log |u^2 - 3u + 2| = -2 \log |x| - 2C, \end{aligned}$$

y aplicando la función exponencial a ambos miembros y simplificando llegamos a la solución

$$u^2 - 3u + 2 = e^{-2 \log |x| - 2C} = \frac{e^{-2C}}{e^{\log |x|^2}} = \frac{C}{x^2},$$

reescribiendo $C = e^{-2C}$, como una constante arbitraria.

Finalmente, deshaciendo el cambio inicial de variable $u = y/x$, llegamos a la solución general de la ecuación

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\frac{y}{x} + 2 = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow y^2 - 3xy + 2x^2 = C.$$

6.4 E.D.O. lineales

Definición 6.8 (E.D.O. lineal). Una ecuación diferencial ordinaria lineal es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse de la forma

$$y' + g(x)y = h(x).$$

6.4.1 Resolución de una E.D.O. Lineal

Para resolver esta ecuación diferencial, intentamos poner el primer miembro como derivada de un producto. Para ello multiplicamos los dos miembros de la igualdad por una función $f(x)$ tal que

$$f'(x) = g(x)f(x).$$

De esta manera tenemos

$$\begin{aligned} y'f(x) + g(x)f(x)y &= h(x)f(x) \\ \Updownarrow \\ y'f(x) + f'(x)y &= h(x)f(x) \\ \Updownarrow \\ \frac{d}{dx}(yf(x)) &= h(x)f(x) \end{aligned}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación anterior llegamos a la solución

$$yf(x) = \int h(x)f(x) dx + C.$$

Por otro lado, la única función que cumple $f'(x) = g(x)f(x)$ es

$$f(x) = e^{\int g(x) dx},$$

de modo que, al sustituir en la solución anterior, llegamos a la solución general de una ecuación diferencial lineal

$$ye^{\int g(x) dx} = \int h(x)e^{\int g(x) dx} dx + C,$$

o lo que es lo mismo

 Consejo

Solución de una ecuación diferencial lineal

$$y = e^{-\int g(x) dx} \left(\int h(x)e^{\int g(x) dx} dx + C \right).$$

Ejemplo 6.6. Si en la ecuación diferencial que explica el enfriamiento de un cuerpo, la temperatura del medio en el que se encuentra no es constante sino que cambia con el tiempo, es decir, es una función $T_a(t)$, entonces la ecuación diferencial resultante

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a(t)),$$

es una ecuación diferencial lineal que puede escribirse como

$$T' - kT = -kT_a(t),$$

donde el término independiente es $-kT_a(t)$ y el coeficiente de T es $-k$.

Sustituyendo en la solución general de una ecuación diferencial lineal tenemos

$$y = e^{-\int -k dt} \left(\int -kT_a(t)e^{\int -k dt} dt + C \right) = e^{kt} \left(-\int kT_a(t)e^{-kt} dt + C \right).$$

Si en un caso concreto la temperatura del aire estuviese dada por la función $T_a(t) = t$, y la constante de proporcionalidad fuese $k = 1$, entonces la solución general de la ecuación diferencial sería

$$y = e^t \left(-\int te^{-t} dt + C \right) = e^t(e^{-t}(t+1) + C) = Ce^t + t + 1.$$

Si además nos dicen que en el instante 0 la temperatura del cuerpo es de 5 °C, es decir, nos dan la condición inicial $T(0) = 5$, entonces se puede calcular la constante C

$$y(0) = Ce^0 + 0 + 1 = 5 \Leftrightarrow C + 1 = 5 \Leftrightarrow C = 4,$$

y entonces la solución particular que se obtiene es

$$y(t) = 4e^t + t + 1.$$

7 Cálculo diferencial en varias variables

7.1 Funciones vectoriales de una variable real

Definición 7.1 (Función vectorial de una variable real). Una *función vectorial de una variable real* o *campo vectorial de una variable escalar* es una función que asocia cada valor escalar $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ con un vector $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

donde $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, son funciones reales de una variable real conocidas como *funciones coordenadas*.

Los campos vectoriales más habituales se dan en plano real $\mathbb{R}^2$, donde se suelen representar así

$$f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

y en el espacio real $\mathbb{R}^3$, donde se representan así

$$f(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

7.1.1 Representación gráfica de un campo vectorial

La representación gráfica de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una trayectoria en el plano real.

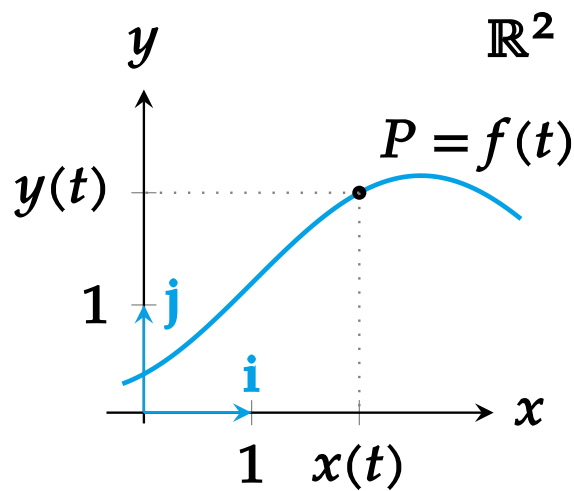


Figura 7.1: Trayectoria de un campo vectorial en el plano real

La representación gráfica de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una trayectoria en el espacio real.

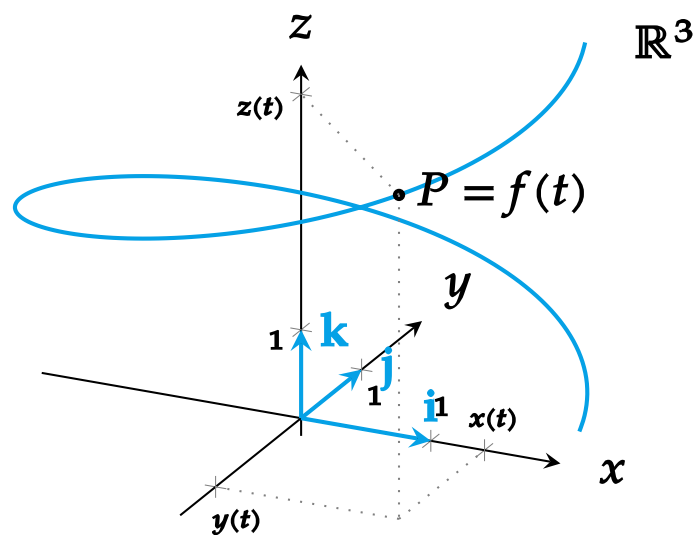


Figura 7.2: Trayectoria de un campo vectorial en el espacio real

7.2 Derivada de un campo vectorial

El concepto de derivada como límite de la tasa de variación media de una función se extiende fácilmente a los campos vectoriales.

Definición 7.2 (Derivada de un campo vectorial). Un campo vectorial $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es *derivable* en un punto $t = a$ si existe el límite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}.$$

En tal caso, el valor del límite se conoce como *derivada* del campo vectorial en a , y se escribe $f'(a)$.

Muchas propiedades de las funciones reales de una variable real se extienden a los campos vectoriales a través de sus funciones coordenadas. Así, por ejemplo, la derivada de un campo vectorial puede calcularse a partir de las derivadas de sus funciones coordenadas.

Teorema 7.1 (Derivada de un campo vectorial a partir de sus funciones coordenadas). Dado un campo vectorial $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, si $x_i(t)$ es derivable en $t = a$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces f es derivable en a y su derivada es

$$f'(a) = (x'_1(a), \dots, x'_n(a)).$$

Prueba. La demostración para un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es sencilla.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(a + \Delta t), y(a + \Delta t)) - (x(a), y(a))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(a + \Delta t) - x(a)}{\Delta t}, \frac{y(a + \Delta t) - y(a)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(a + \Delta t) - x(a)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(a + \Delta t) - y(a)}{\Delta t} \right) = (x'(a), y'(a)). \end{aligned}$$

□

7.2.1 Interpretación cinemática: movimiento curvilíneo

La interpretación de la derivada como velocidad a lo largo de una trayectoria en la recta real puede generalizarse a trayectorias en cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

En el caso del plano real $\mathbb{R}^2$, si $f(t)$ describe la posición de un objeto móvil en el plano en el instante t , tomando como referencia el origen de coordenadas O y los vectores coordenados $\{\mathbf{i} = (1, 0), \mathbf{j} = (0, 1)\}$, se puede representar la posición P del móvil en cada instante t mediante un vector $\vec{OP} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, cuyas coordenadas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \text{Dom}(f)$$

son las *funciones coordenadas* de f .

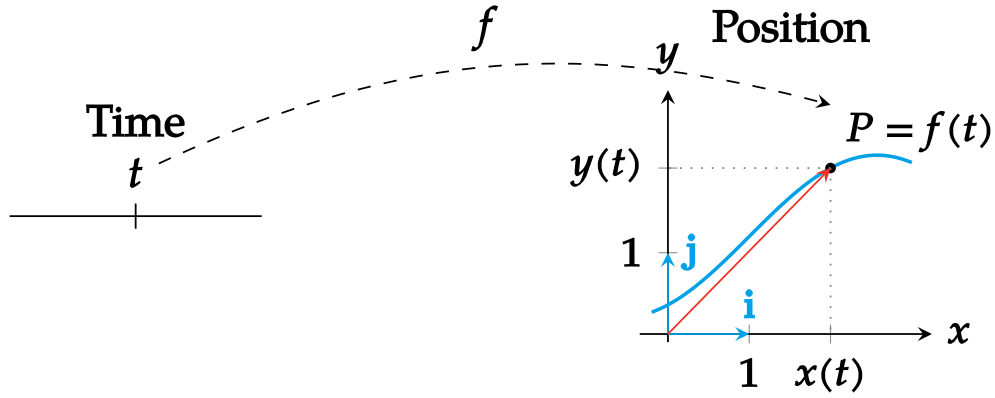


Figura 7.3: Trayectoria de un movimiento curvilíneo en el plano

i Nota

En este contexto, la derivada de una trayectoria $f'(a) = (x'_1(a), \dots, x'_n(a))$ es el vector *velocidad* de la trayectoria f en el instante $t = a$.

Ejemplo 7.1. Dada la trayectoria $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas, sus funciones coordenadas son $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, y su velocidad es

$$\mathbf{v} = f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

En el instante $t = \pi/4$, el móvil se encuentra en la posición $f(\pi/4) = (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y se mueve con una velocidad $\mathbf{v} = f'(\pi/4) = (-\sin(\pi/4), \cos(\pi/4)) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

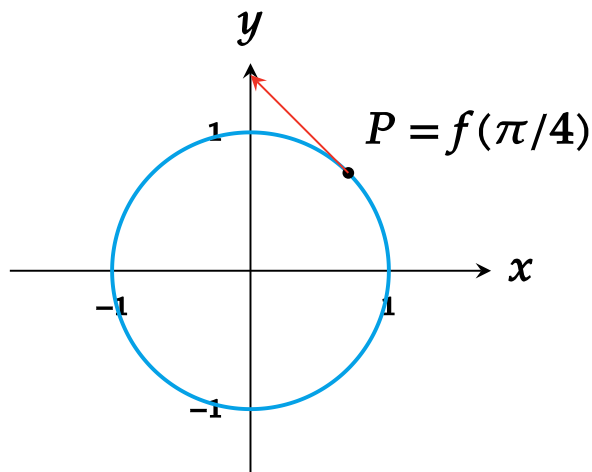


Figura 7.4: Trayectoria de la circunferencia unidad

Obsérvese que el módulo del vector velocidad siempre vale 1, ya que $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$.

7.2.2 Recta tangente a una trayectoria

7.2.2.1 Recta tangente a una trayectoria en el plano

7.2.2.1.1 Ecuación vectorial

Dada una trayectoria $f(t)$ en el plano real, los vectores paralelos a la velocidad $\mathbf{v}$ en un instante a se llaman *vectores tangentes* a la trayectoria f en el instante a , y la recta que pasa por $P = f(a)$ dirigida por $\mathbf{v}$ es la recta tangente a la gráfica de f en el instante a .

Definición 7.3 (Recta tangente a una trayectoria en el plano). Dada una trayectoria $f(t)$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, la *recta tangente* a la gráfica de f en el instante a es la recta de ecuación

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= f(a) + t f'(a) = (x(a), y(a)) + t(x'(a), y'(a)) \\ &= (x(a) + tx'(a), y(a) + ty'(a)). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2. Se ha visto que para la trayectoria $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuya imagen es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas, la posición del móvil en el instante $t = \pi/4$ es $f(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y su velocidad $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Así pues, la ecuación de la recta tangente a f en ese instante es

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= f(\pi/4) + t\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + t \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

7.2.2.1.2 Ecuaciones cartesiana y punto-pendiente

De la ecuación vectorial de la recta tangente a una trayectoria $f(t)$ en el instante $t = a$ se obtienen las funciones coordenadas

$$\begin{cases} x = x(a) + tx'(a) \\ y = y(a) + ty'(a) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

y despejando t en ambas ecuaciones e igualando se llega a la *ecuación cartesiana* de la recta tangente

$$\frac{x - x(a)}{x'(a)} = \frac{y - y(a)}{y'(a)},$$

siempre que $x'(a) \neq 0$ e $y'(a) \neq 0$.

De esta ecuación se obtiene fácilmente la ecuación de la recta tangente en la forma *punto-pendiente*

$$y - y(a) = \frac{y'(a)}{x'(a)}(x - x(a)).$$

Ejemplo 7.3. Partiendo de la ecuación vectorial de la recta tangente del ejemplo anterior

$$l : (x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2},$$

y su ecuación en la forma punto-pendiente es

$$y - \sqrt{2}/2 = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$

7.2.3 Recta normal a una trayectoria en el plano

Se ha visto que la recta tangente a una trayectoria $f(t)$ en el instante a es la recta que pasa por el punto $P = f(a)$ dirigida por el vector velocidad $\mathbf{v} = f'(a) = (x'(a), y'(a))$. Si se toma como vector director un vector ortogonal a $\mathbf{v}$, se obtiene otra recta que se conoce como *recta normal* a la trayectoria.

Definición 7.4 (Recta normal a una trayectoria en el plano). Dada una trayectoria $f(t)$ en el plano real $\mathbb{R}^2$, la *recta normal* a la gráfica de f en el instante $t = a$ es la recta de ecuación

$$l : (x, y) = (x(a), y(a)) + t(y'(a), -x'(a)) = (x(a) + ty'(a), y(a) - tx'(a)).$$

Su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - x(a)}{y'(a)} = \frac{y - y(a)}{-x'(a)},$$

y su ecuación en la forma punto-pendiente es

$$y - y(a) = \frac{-x'(a)}{y'(a)}(x - x(a)).$$

i Nota

La recta normal es siempre perpendicular a la recta tangente, ya que sus vectores directores son ortogonales.

Ejemplo 7.4. Considerando de nuevo la trayectoria de la circunferencia unidad $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, la recta normal a la gráfica de f en el instante $t = \pi/4$ es

$$\begin{aligned} l : (x, y) &= (\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) + t(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4)) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \end{aligned}$$

su ecuación cartesiana es

$$\frac{x - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{y - \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2},$$

y su ecuación en la forma punto-pendiente es

$$y - \sqrt{2}/2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}(x - \sqrt{2}/2) \Rightarrow y = x.$$

7.2.4 Rectas tangente y normal a una función

Un caso particular de las rectas tangente y normal a una trayectoria son las rectas tangente y normal a una función de una variable real. Para cualquier función $y = f(x)$, la trayectoria que traza su gráfica es

$$g(x) = (x, f(x)) \quad x \in \mathbb{R},$$

y su velocidad es

$$g'(x) = (1, f'(x)),$$

de manera que la recta tangente a g en el instante a es

$$\frac{x - a}{1} = \frac{y - f(a)}{f'(a)} \Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

y la recta normal es

$$\frac{x - a}{f'(a)} = \frac{y - f(a)}{-1} \Rightarrow y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a).$$

Ejemplo 7.5. Dada la función $y = x^2$, la trayectoria que traza su gráfica es $g(x) = (x, x^2)$ y su velocidad es $g'(x) = (1, 2x)$. En el instante $x = 1$ la trayectoria pasa por el punto $(1, 1)$ con una velocidad $(1, 2)$. Así pues, la recta tangente en ese instante es

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1,$$

y la recta normal es

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-1} \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}.$$

7.2.5 Recta tangente a una trayectoria en el espacio

El concepto de recta tangente a una trayectoria se extiende fácilmente del plano real al espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, es una trayectoria en el espacio real $\mathbb{R}^3$, entonces, en el instante a , el móvil que recorre esta trayectoria ocupará la posición $P = (x(a), y(a), z(a))$ con una velocidad $\mathbf{v} = f'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a))$. Así pues, la recta tangente a f en ese instante tiene la siguiente ecuación vectorial

$$\begin{aligned} l : (x, y, z) &= (x(a), y(a), z(a)) + t(x'(a), y'(a), z'(a)) = \\ &= (x(a) + tx'(a), y(a) + ty'(a), z(a) + tz'(a)), \end{aligned}$$

y sus ecuaciones cartesianas son

$$\frac{x - x(a)}{x'(a)} = \frac{y - y(a)}{y'(a)} = \frac{z - z(a)}{z'(a)},$$

siempre que $x'(a) \neq 0$, $y'(a) \neq 0$ y $z'(a) \neq 0$.

Ejemplo 7.6. Dada la trayectoria del espacio real $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el instante $t = \pi/2$ la trayectoria pasa por el punto

$$f(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \pi/2) = (0, 1, \pi/2),$$

con una velocidad

$$\mathbf{v} = f'(\pi/2) = (-\sin(\pi/2), \cos(\pi/2), 1) = (-1, 0, 1),$$

y la recta tangente a la gráfica de f en ese instante es

$$l : (x, y, z) = (0, 1, \pi/2) + t(-1, 0, 1) = (-t, 1, t + \pi/2).$$

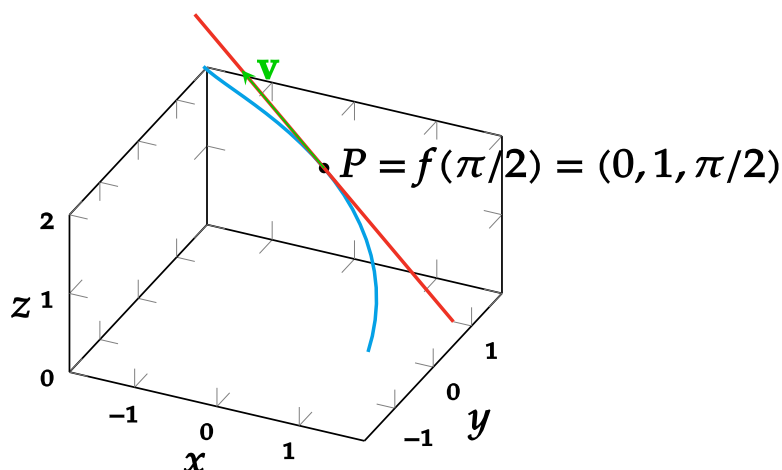


Figura 7.5: Recta tangente a una trayectoria en el espacio



[Ejemplo interactivo](#)

7.2.6 Plano normal a una trayectoria en el espacio

En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ la recta normal a una trayectoria no es única. Existen infinitas rectas normales y todas ellas están contenidas en el *plano normal*.

Si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, es una trayectoria en el espacio real $\mathbb{R}^3$, entonces, en el instante a , el móvil que recorre esta trayectoria ocupará la posición $P = (x(a), y(a), z(a))$ con una velocidad $\mathbf{v} = f'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a))$. Así pues, tomando el vector velocidad como vector normal, el plano normal a f en ese instante tiene la siguiente ecuación vectorial

$$\begin{aligned} \Pi : (x - x(a), y - y(a), z - z(a)) \cdot (x'(a), y'(a), z'(a)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x'(a)(x - x(a)) + y'(a)(y - y(a)) + z'(a)(z - z(a)) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.7. Para la trayectoria del ejemplo anterior $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el instante $t = \pi/2$ la trayectoria pasa por el punto

$$f(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \pi/2) = (0, 1, \pi/2),$$

con una velocidad

$$\mathbf{v} = f'(\pi/2) = (-\sin(\pi/2), \cos(\pi/2), 1) = (-1, 0, 1),$$

y el plano normal a la gráfica de f en ese instante es

$$\Pi : \left(x - 0, y - 1, z - \frac{\pi}{2} \right) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow -x + z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

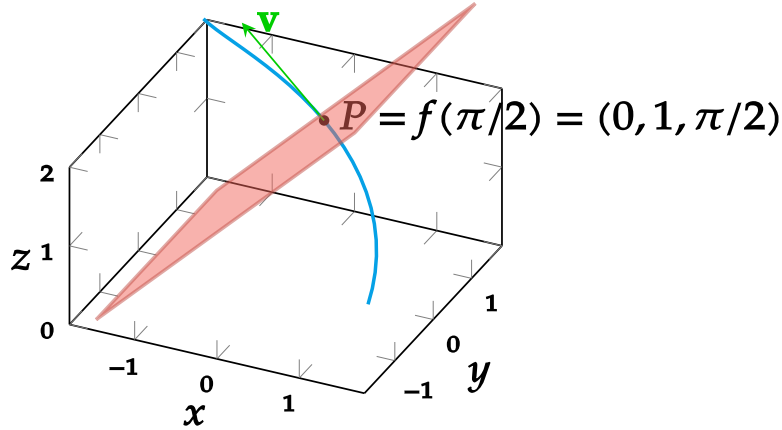


Figura 7.6: Plano normal a una trayectoria en el espacio



[Ejemplo interactivo](#)

7.3 Funciones de varias variables

En numerosos problemas de geometría, física y ciencias naturales nos encontramos a menudo con variables o factores que dependen o están relacionados con otros dos, tres o más factores:

- El área de un triángulo depende de dos factores que son su base y su altura.
- El volumen que ocupa un gas perfecto depende de dos factores que son su presión y su temperatura.
- El camino recorrido por un cuerpo en un movimiento de caída libre depende de multitud de factores entre los que cabe destacar: el tiempo que dure la caída, el área de la sección transversal del cuerpo, la latitud del lugar, la altura sobre el nivel del mar, la presión del aire, la temperatura del aire, etc.

Estas dependencias se expresan con funciones de varias variables.

Definición 7.5 (Función de varias variables). Una *función de n variables* de un conjunto $A_1 \times \cdots \times A_n$ en un conjunto B , es una relación que asocia a cada tupla $(a_1, \dots, a_n) \in$

$A_1 \times \cdots \times A_n$ un único elemento de B que se denota $f(a_1, \dots, a_n)$, y se llama imagen de $(a_1, \dots, a_n)$ mediante f .

$$\begin{array}{ccc} f : & A_1 \times \cdots \times A_n & \longrightarrow & B \\ & (a_1, \dots, a_n) & \longrightarrow & f(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

Cuando $A_1, \dots, A_n, B \subseteq \mathbb{R}$, entonces se dice que f es una función real de n variables reales o bien un *campo escalar*.

Ejemplo 7.8.

- El área de un triángulo es la función real de dos variables reales

$$f(x, y) = \frac{xy}{2}.$$

- El volumen de un gas perfecto es otra función real de dos variables

$$v = f(t, p) = \frac{nRt}{p},$$

con n y R constantes.

7.3.1 Gráfica de una función de dos variables

La representación gráfica cartesiana de una función de dos variables $f(x, y)$ es una superficie del espacio real $\mathbb{R}^3$ donde cada punto de la superficie tiene coordenadas (x, y, z) , siendo $z = f(x, y)$.

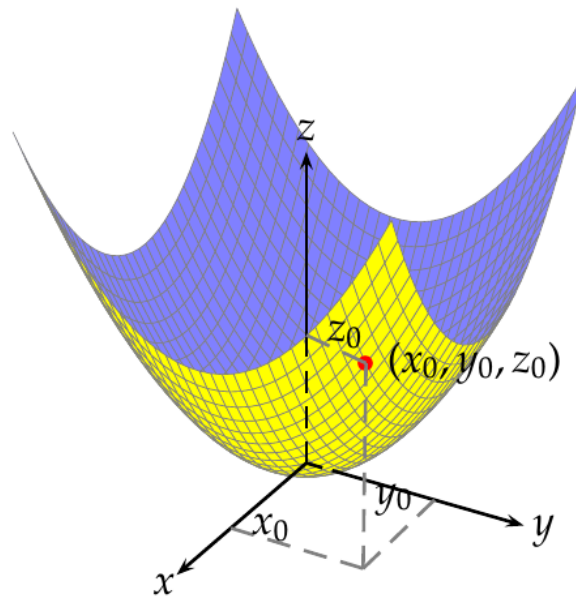


Figura 7.7: Representación gráfica de una función de dos variables

Ejemplo 7.9. La función $f(x, y) = \frac{xy}{2}$ que mide el área de un triángulo de base x y altura y tiene la siguiente representación gráfica:

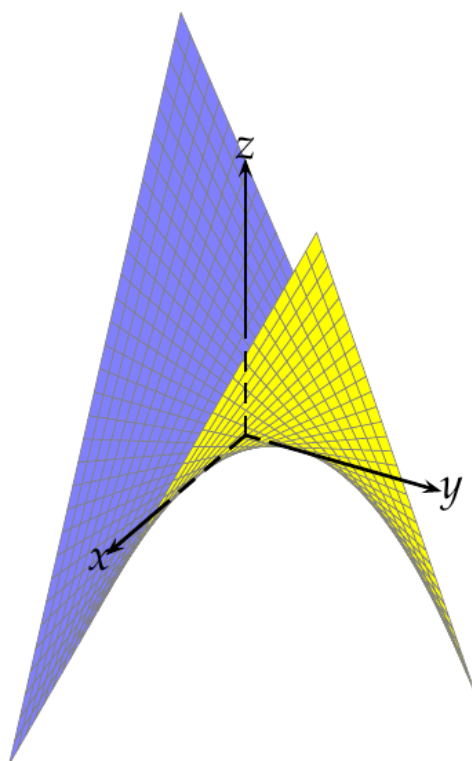


Figura 7.8: Gráfica de la función que mide el área de un triángulo

Y la función $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tiene la siguiente representación gráfica tan peculiar:

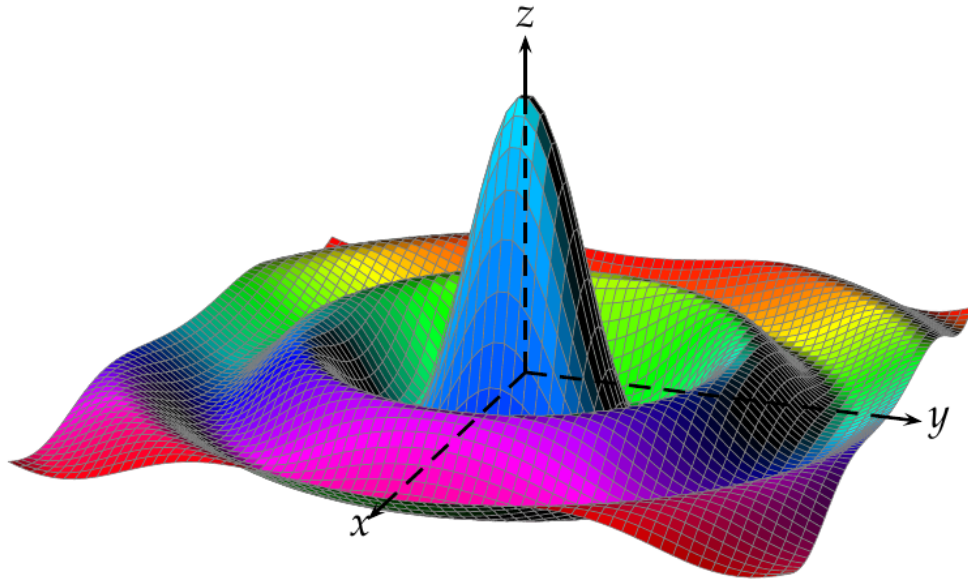


Figura 7.9: Gráfica de la función que representa las ondas creadas por una gota de agua

7.3.2 Conjunto de nivel de un campo escalar

Definición 7.6 (Conjunto de nivel). Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se llama *conjunto de nivel c* de f al conjunto

$$C_{f,c} = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = c\}.$$

Ejemplo 7.10. Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $P = (1, 1)$, el conjunto de nivel de f que incluye al punto P es

$$C_{f,2} = \{(x, y) : f(x, y) = f(1, 1) = 2\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\},$$

que es la circunferencia del plano real centrada en el origen y de radio $\sqrt{2}$.

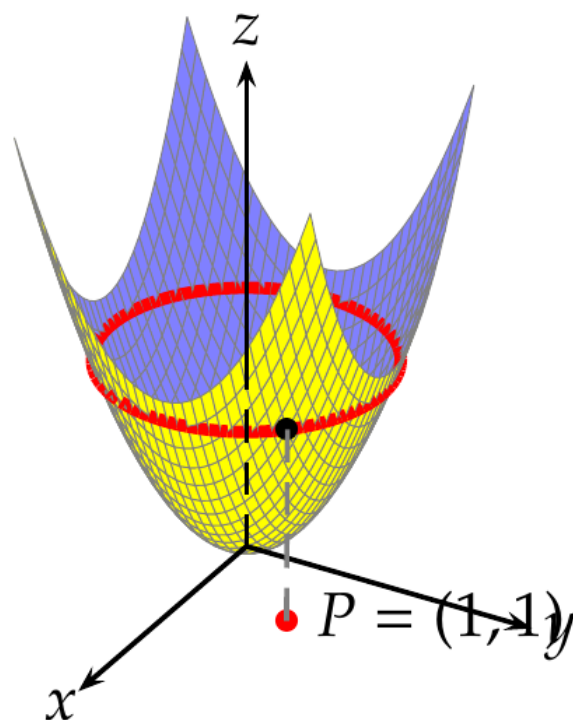


Figura 7.10: Gráfica del conjunto de nivel de un paraboloides

7.3.3 Funciones parciales

Definición 7.7 (Función parcial). Dado un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se llama *función parcial i -ésima* de f a cualquier función $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que resulta de fijar todas las variables de f como constantes, excepto la variable i , es decir:

$$f_i(x) = f(c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_n),$$

con c_j ($j = 1, \dots, n$, $j \neq i$) constantes.

Ejemplo 7.11. Si consideramos la función del área de un triángulo

$$f(x, y) = \frac{xy}{2},$$

y fijamos el valor de la base $x = c$, entonces el área del triángulo ya sólo depende de la altura y f se convierte en una función de una sola variable, que es la función parcial:

$$f_1(y) = f(c, y) = \frac{cy}{2},$$

con c constante.

7.4 Noción de derivada parcial

7.4.1 Variación de una función con respecto a una variable

Al igual que medíamos la variación de una función de una variable, tiene sentido medir la variación de una función de varias variables con respecto a cada una de sus variables.

Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar de $\mathbb{R}^2$. Si estamos en el punto (x_0, y_0) y nos movemos una cantidad Δx en la dirección del eje X , entonces, al mantenerse la coordenada y constante, pasaremos desde el punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + \Delta x, y_0)$, y la variación que experimenta la función será

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

La variación relativa que experimenta la función con respecto a la variable x vendrá dada por el cociente

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

7.4.2 Tasa de variación instantánea de un campo escalar con respecto a una variable

Si en lugar de medir la variación de una función con respecto a una variable en un intervalo, medimos la variación en un punto, es decir, cuando Δx tiende a 0, entonces obtenemos una tasa de variación instantánea:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Al valor del límite, cuando existe, también se le conoce como *derivada parcial* de f con respecto a la variable x en el punto (x_0, y_0) y se nota

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Esta derivada parcial mide la tasa de variación instantánea de f en el punto $P = (x_0, y_0)$ cuando P se mueve en la dirección del eje X .

7.4.3 Interpretación geométrica de la derivada parcial

Geoméricamente, $z = f(x, y)$ define una superficie. Si se corta esta superficie con el plano de ecuación $y = y_0$ (es decir, si y se fija como una constante), la intersección de este plano con la superficie es una curva plana cuya pendiente en el punto (x_0, y_0) es la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

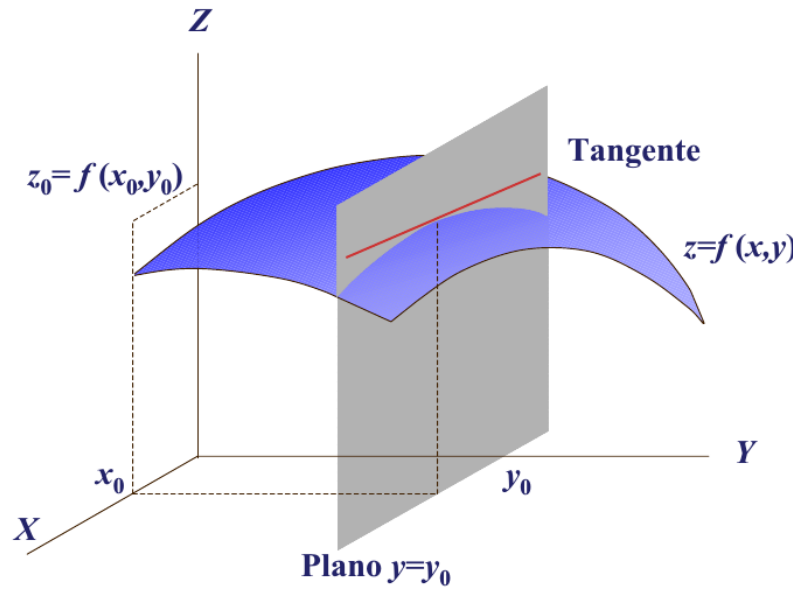


Figura 7.11: Gráfica de la tangente a la intersección de una superficie con un plano

7.4.4 Derivada parcial

El concepto de derivada parcial visto para funciones de dos variables puede extenderse fácilmente para funciones de n variables.

Definición 7.8 (Derivada parcial). Dada una función de n variables $f(x_1, \dots, x_n)$, se dice que f es *derivable parcialmente* con respecto a la variable x_i en el punto $a = (a_1, \dots, a_n)$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}.$$

En tal caso, al valor del límite se le llama *derivada parcial* de f en a con respecto a la variable x_i , y se denota

$$f'_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

La definición de derivada para funciones de una variable es un caso particular de esta definición para $n = 1$.

7.4.5 Cálculo de la derivada parcial

Al medir la variación de f con respecto a la variación de una sola de sus variables x_i en un punto $a = (a_1, \dots, a_n)$, el resto de las variables se pueden considerar como constantes y, en tal caso, podemos ver a f como una función parcial i -ésima

$$f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

La derivada parcial de f con respecto a x_i puede calcularse derivando esta función:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_i(a_i).$$

Consejo

Regla. Para derivar parcialmente $f(x_1, \dots, x_n)$ con respecto a una variable x_i , se deriva f como si la única variable fuese x_i , tratando el resto de las variables como constantes.

Ejemplo 7.12. En la ecuación de estado de los gases perfectos, el volumen es una función que depende de dos variables

$$v(t, p) = \frac{nRt}{p},$$

donde t mide la temperatura, p la presión y n y R son constantes.

La tasa de variación instantánea que experimenta el volumen con respecto a la presión viene dada por la derivada parcial de v con respecto a p .

Para calcular esta derivada parcial se fija t como constante y se deriva v como si la única variable fuese p :

$$\frac{\partial v}{\partial p}(t, p) = \frac{d}{dp} \left(\frac{nRt}{p} \right)_{t=\text{cte}} = \frac{-nRt}{p^2}.$$

Del mismo modo, la tasa de variación instantánea del volumen con respecto a la temperatura es:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, p) = \frac{d}{dt} \left(\frac{nRt}{p} \right)_{p=\text{cte}} = \frac{nR}{p}.$$

7.5 Vector gradiente

Definición 7.9 (Vector gradiente). Dado un campo escalar $f(x_1, \dots, x_n)$, se llama *gradiente* de f , y se escribe ∇f , a la función que a cada punto $a = (a_1, \dots, a_n)$ le asigna el vector cuyas coordenadas cartesianas son las derivadas parciales de f en a ,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Más adelante se mostrará que el vector gradiente en un punto dado tiene la misma magnitud y dirección que la velocidad máxima de variación de la función en ese punto.

De este modo, $\nabla f(a)$ indica la dirección de máximo crecimiento de f en el punto a , mientras que $-\nabla f(a)$ indica la dirección de máximo decrecimiento.

Ejemplo 7.13. Al calentar una superficie la temperatura t (en °C) en cada punto (x, y, z) (en m) de dicha superficie viene dada por la función:

$$t(x, y, z) = \frac{x}{y} + z^2.$$

La dirección en la que más rápidamente aumenta la temperatura nos la da el vector gradiente

$$\nabla t(x, y, z) = \left(\frac{\partial t}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial t}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial t}{\partial z}(x, y, z) \right) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}, 2z \right).$$

Si estamos, por ejemplo, en el punto $(2, 1, 1)$ dicha dirección será

$$\nabla t(2, 1, 1) = \left(\frac{1}{1}, \frac{-2}{1^2}, 2 \cdot 1 \right) = (1, -2, 2),$$

y su magnitud

$$|\nabla t(2, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ °C/m}.$$

7.6 Composición de una trayectoria con un campo escalar

7.6.1 Regla de la cadena

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una trayectoria, entonces es posible componer g con f , de manera que $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable real.

Teorema 7.2 (Regla de la cadena). *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una trayectoria derivable, entonces*

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Ejemplo 7.14. Si se toma el campo escalar del plano real $f(x, y) = x^2 y$ y la trayectoria $g(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ del mismo plano, entonces

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2) \quad \text{y} \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

y

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = (2 \cos t \sin t, \cos^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t.$$

Se puede llegar al mismo resultado, sin aplicar la regla de la cadena, derivando directamente la función compuesta

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t \sin t,$$

de manera que

$$(f \circ g)'(t) = 2 \cos t (-\sin t) \sin t + \cos^2 t \cos t = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t.$$

La regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una trayectoria permite obtener fácilmente el álgebra de derivadas para funciones reales de una variable real:

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v' \\ (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ (u \circ v)' &= u'(v)v'\end{aligned}$$

Para deducir la derivada de la suma se toma el campo escalar $f(x, y) = x + y$ y la trayectoria $g(t) = (u(t), v(t))$, de manera que aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(u + v)'(t) = (f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = (1, 1) \cdot (u'(t), v'(t)) = u'(t) + v'(t).$$

y para deducir derivada del producto, tomando $f(x, y) = xy$, se tiene

$$(uv)'(t) = (f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = (v(t), u(t)) \cdot (u'(t), v'(t)) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

7.7 Derivada direccional

Para un campo escalar $f(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ y un punto $P = (x_0, y_0)$, se vio que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es la tasa de variación instantánea de f con respecto a x en el punto P , es decir, cuando nos desplazamos desde el punto P en la dirección del eje X .

Del mismo modo, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es la tasa de variación instantánea de f con respecto a y en el punto P , es decir, cuando nos desplazamos desde el punto P en la dirección del eje Y .

Pero, ¿qué pasa si nos movemos en cualquier otra dirección?

La tasa de variación instantánea de f en un punto P en la dirección de un vector unitario cualquiera $\mathbf{u}$ se conoce como *derivada direccional*.

Definición 7.10 (Derivada direccional). Dado un campo escalar f de $\mathbb{R}^n$, un punto P y un vector unitario $\mathbf{u}$ en ese espacio, el límite

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h},$$

cuando existe, se llama *derivada direccional* de f en el punto P en la dirección de $\mathbf{u}$.

Si se considera un vector unitario $\mathbf{u}$, la trayectoria que pasa por P , dirigida por $\mathbf{u}$, tiene ecuación

$$g(t) = P + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que para $t = 0$, pasa por $P = g(0)$ con velocidad $\mathbf{u} = g'(0)$.

Así, la tasa de variación de f a partir del punto P en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$(f \circ g)'(0) = \nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

Obsérvese que las derivadas parciales son las derivadas direccionales en las direcciones de los vectores coordenados.

Ejemplo 7.15. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, su vector gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y),$$

de manera que la derivada direccional en el punto $P = (1, 1)$, en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} = (2, 2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Para calcular la derivada direccional en la dirección de un vector no unitario $\mathbf{v}$, basta con convertirlo en unitario mediante la transformación

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

7.7.1 Crecimiento de un campo escalar a partir del gradiente

Como se ha visto, para un vector unitario $\mathbf{u}$

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(P)| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo que forma $\mathbf{u}$ con el vector gradiente $\nabla f(P)$.

Teniendo en cuenta que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, para cualquier vector $\mathbf{u}$ se cumple

$$-|\nabla f(P)| \leq f'_{\mathbf{u}}(P) \leq |\nabla f(P)|.$$

Además, si $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección y sentido que el gradiente, se tiene

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = |\nabla f(P)| \cos 0 = |\nabla f(P)|.$$

Por tanto, el crecimiento máximo de un campo escalar se produce en la dirección y sentido del gradiente.

Del mismo modo, si $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección y sentido opuesto al gradiente, se tiene

$$f'_u(P) = |\nabla f(P)| \cos \pi = -|\nabla f(P)|.$$

Por tanto, el decrecimiento máximo de un campo escalar se produce en la dirección y sentido opuesto al gradiente.

7.8 Derivación implícita

Si se sabe que la ecuación

$$f(x, y) = 0$$

define a y como función de x , $y = h(x)$, alrededor de cierto valor $x = x_0$ para el que $y = h(x_0) = y_0$, entonces, si se toma la trayectoria $g(x) = (x, h(x))$, la ecuación anterior se puede expresar como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x, h(x)) = 0,$$

de modo que usando la regla de la cadena se tiene

$$(f \circ g)'(x) = \nabla f(g(x)) \cdot g'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (1, h'(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x) = 0,$$

de donde se deduce

$$y' = h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

A este proceso que permite obtener y' en un entorno de x_0 sin disponer de la fórmula explícita $y = h(x)$, se le llama *derivación implícita*.

Ejemplo 7.16. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas, que también puede expresarse como

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Si se piensa en y como función implícita de x , se tiene

$$y' = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}.$$

Podría llegarse al mismo resultado, despejando y de la ecuación de la circunferencia,

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Si se toma la raíz positiva, que corresponde a la semicircunferencia superior, la derivada vale

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

que coincide con el resultado de la derivación implícita, teniendo en cuenta que $y = \sqrt{1-x^2}$.

7.8.1 Propiedad del gradiente

Teorema 7.3 (Ortogonalidad del gradiente a los conjuntos de nivel). *Sea C el conjunto de nivel de un campo escalar f que incluye a un punto P . Si $\mathbf{v}$ es la velocidad al pasar por P de una trayectoria que circule por C , entonces*

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Es decir, el vector gradiente de f en P es normal a C en P , siempre que no sea nulo.

Prueba. Si se considera una trayectoria $g(t)$ a lo largo del conjunto de nivel C que pase por $P = g(t_0)$, de modo que $\mathbf{v} = g'(t_0)$, entonces

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(P),$$

que es constante para cualquier t , y al aplicar la regla de la cadena se tiene

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = 0,$$

de modo que, cuando $t = t_0$, se tiene

$$\nabla f(P) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

□

7.8.2 Rectas normal y tangente a una línea en el plano

Según el resultado anterior, la recta normal a una línea $f(x, y) = 0$ en un punto $P = (x_0, y_0)$, tiene ecuación

$$P + t\nabla f(P) = (x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0).$$

Ejemplo 7.17. Dado el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, y el punto $P = (0, 1)$, resulta que el conjunto de nivel que pasa por P , para el que $f(x, y) = f(P) = 0$ es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Así pues, tomando como vector normal el gradiente de f

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y),$$

que en el punto $P = (0, 1)$ vale $\nabla f(0, 1) = (0, 2)$, la recta normal a la circunferencia en P es

$$P + t\nabla f(P) = (0, 1) + t(0, 2) = (0, 1 + 2t),$$

que se trata de la recta vertical $x = 0$, que coincide con el eje Y .

Y la recta tangente a la circunferencia en P es

$$((x, y) - P) \cdot \nabla f(P) = ((x, y) - (0, 1)) \cdot (0, 2) = (x, y - 1) \cdot (0, 2) = 2(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1.$$

7.8.3 Recta normal y plano tangente a una superficie

Del mismo modo, si en lugar de una línea en el plano se tiene una superficie $f(x, y, z) = 0$, en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ la recta normal tiene ecuación

$$P + t\nabla f(P) = (x_0, y_0, z_0) + t\nabla f(x_0, y_0, z_0).$$

Ejemplo 7.18. Dado el campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$, y el punto $P = (1, 1, 2)$, resulta que el conjunto de nivel que pasa por P , para el que $f(x, y, z) = f(P) = 0$, es el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Así pues, tomando como vector normal el gradiente de f , que vale

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -1),$$

que en el punto $P = (1, 1, 2)$ vale $\nabla f(1, 1, 2) = (2, 2, -1)$, la recta normal al paraboloide en P es

$$P + t\nabla f(P) = (1, 1, 2) + t\nabla f(1, 1, 2) = (1, 1, 2) + t(2, 2, -1) = (1 + 2t, 1 + 2t, 2 - t),$$

que se trata de la recta de ecuaciones $x = y$ y $x = 5 - 2z$.

Y el plano tangente al paraboloides en P es

$$\begin{aligned} ((x, y, z) - P) \cdot \nabla f(P) &= ((x, y, z) - (1, 1, 2)) \cdot (2, 2, -1) = (x - 1, y - 1, z - 2) \cdot (2, 2, -1) = \\ &= 2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 2x + 2y - z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.19. La gráfica del paraboloides $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ y su plano tangente en el punto $P = (1, 1, 2)$ es

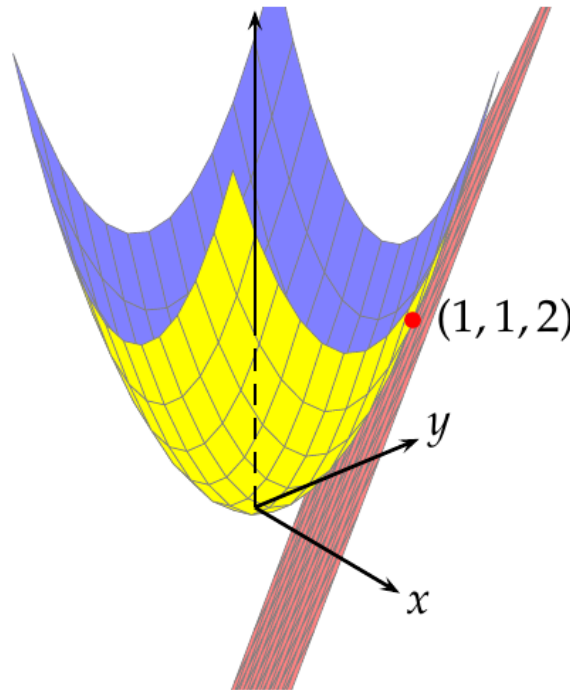


Figura 7.12: Gráfica del plano tangente a un paraboloides

7.9 Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de una función son, a su vez, funciones de varias variables que muchas veces pueden volverse a derivar parcialmente con respecto a alguna de sus variables.

Definición 7.11 (Derivadas parciales de segundo orden). Si una función $f(x_1, \dots, x_n)$ tiene derivada parcial

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

con respecto a la variable x_i en un conjunto A , entonces podemos derivar de nuevo parcialmente f'_{x_i} con respecto a la variable x_j . Esta segunda derivada, cuando existe, se llama *derivada parcial de segundo orden* de f con respecto a las variables x_i y x_j , y se nota

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

De forma análoga se definen las derivadas de orden superior.

Ejemplo 7.20. La función de dos variables

$$f(x, y) = x^y$$

tiene cuatro derivadas parciales de segundo orden, que son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \log x, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \log x) = yx^{y-1} \log x + x^y \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \log x) = x^y (\log x)^2. \end{aligned}$$

7.10 Matriz hessiana

Definición 7.12 (Matriz hessiana). Dada una función de varias variables $f(x_1, \dots, x_n)$, para la que existen todas sus derivadas parciales de segundo orden en un punto $a = (a_1, \dots, a_n)$, se define la *matriz hessiana* de f en a , y se nota $\nabla^2 f(a)$, como la matriz cuadrada cuyos elementos son

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Al determinante de esta matriz se le llama *hessiano* de f en a , y se nota $Hf(a) = |\nabla^2 f(a)|$.

Ejemplo 7.21. Consideremos de nuevo la función de dos variables $f(x, y) = x^y$. Su matriz hessiana es

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(y \log x + 1) \\ x^{y-1}(y \log x + 1) & x^y(\log x)^2 \end{pmatrix}.$$

En el punto $(1, 2)$ la matriz vale

$$\nabla^2 f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2(2-1)1^{2-2} & 1^{2-1}(2 \log 1 + 1) \\ 1^{2-1}(2 \log 1 + 1) & 1^2(\log 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y el hessiano en dicho punto vale

$$Hf(1, 2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

7.10.1 Igualdad de las derivadas cruzadas

En el ejemplo anterior se aprecia que las *derivadas cruzadas* de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ coinciden. Ello es debido al siguiente teorema:

Teorema 7.4 (Igualdad de las derivadas cruzadas). *Si $f(x, y)$ es una función tal que sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existen y son continuas en un conjunto abierto A , entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Una consecuencia del teorema es que, al calcular una derivada parcial de segundo orden que cumpla lo anterior, *el orden en que se realicen las derivadas parciales no importa!*

Si el teorema se cumple para todas las derivadas parciales de segundo orden, entonces la matriz hessiana es simétrica.

7.11 Fórmula de Taylor

7.11.1 Aproximación lineal de un campo escalar

Ya se vio cómo aproximar funciones de una variable mediante polinomios de Taylor. Esto también se puede generalizar a la aproximación de campos escalares mediante polinomios de varias variables.

Si P es un punto del dominio de un campo escalar f y $\mathbf{v}$ un vector, la *fórmula de Taylor* de primer grado de f alrededor del punto P es

$$f(P + \mathbf{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \mathbf{v} + R_{f,P}^1(\mathbf{v}),$$

donde

$$P_{f,P}^1(\mathbf{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \mathbf{v}$$

es el *polinomio de Taylor* de primer grado de f en el punto P , y $R_{f,P}^1(\mathbf{v})$ es el *resto de Taylor* para el vector $\mathbf{v}$, y mide el error cometido en la aproximación.

Se cumple que

$$\lim_{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{R_{f,P}^1(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} = 0$$

Obsérvese que el polinomio de Taylor de primer grado coincide con el plano tangente a f en P .

Si f es un campo escalar de dos variables $f(x, y)$ y $P = (x_0, y_0)$, teniendo en cuenta que para un punto cualquiera $Q = (x, y)$, el vector $\mathbf{v} = \vec{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$, el polinomio de Taylor de f en el punto P , puede expresarse

$$\begin{aligned} P_{f,P}^1(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.22. Dado el campo escalar $f(x, y) = \log(xy)$, su gradiente es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right),$$

y el polinomio de Taylor de primer grado en el punto $P = (1, 1)$ es

$$\begin{aligned} P_{f,P}^1(x, y) &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = \\ &= \log 1 + (1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = x - 1 + y - 1 = x + y - 2. \end{aligned}$$

Este polinomio, permite aproximar el valor de f cerca del punto P .

Por ejemplo

$$f(1.01, 1.01) \approx P_{f,P}^1(1.01, 1.01) = 1.01 + 1.01 - 2 = 0.02.$$

7.11.2 Aproximación cuadrática de un campo escalar

Si P es un punto del dominio de un campo escalar f y $\mathbf{v}$ un vector, la *fórmula de Taylor* de segundo grado de f alrededor del punto P es

$$f(P + \mathbf{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + R_{f,P}^2(\mathbf{v}),$$

donde

$$P_{f,P}^2(\mathbf{v}) = f(P) + \nabla f(P) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

es el *polinomio de Taylor* de segundo grado de f en el punto P , y $R_{f,P}^2(\mathbf{v})$ es el *resto de Taylor* para el vector $\mathbf{v}$.

Se cumple que

$$\lim_{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{R_{f,P}^2(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2} = 0$$

lo que indica que el resto es mucho más pequeño que el cuadrado del módulo de $\mathbf{v}$.

Si f es un campo escalar de dos variables $f(x, y)$ y $P = (x_0, y_0)$, el polinomio de Taylor de f en el punto P , puede expresarse

$$\begin{aligned} P_{f,P}^2(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x_0, y - y_0) \nabla^2 f(x_0, y_0) (x - x_0, y - y_0) = \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 7.23. Dado el campo escalar $f(x, y) = \log(xy)$, su gradiente es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right),$$

y su matriz hessiana es

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^2} \end{pmatrix}$$

y el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $P = (1, 1)$ es

$$\begin{aligned} P_{f,P}^2(x, y) &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1, y - 1) \nabla^2 f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = \\ &= \log 1 + (1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1, y - 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \\ &= x - 1 + y - 1 + \frac{-x^2 - y^2 + 2x + 2y - 2}{2} = \frac{-x^2 - y^2 + 4x + 4y - 6}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$f(1.01, 1.01) \approx P_{f,P}^2(1.01, 1.01) = \frac{-1.01^2 - 1.01^2 + 4 \cdot 1.01 + 4 \cdot 1.01 - 6}{2} = 0.0199.$$

7.12 Extremos

Definición 7.13 (Máximo y mínimo relativos). Dado un campo escalar f de $\mathbb{R}^n$, se dice que un punto P es un *máximo relativo* de f si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que

$$f(P) \geq f(X) \quad \forall X, |\vec{PX}| < \epsilon.$$

Del mismo modo se dice que un punto P es un *mínimo relativo* de f si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que

$$f(P) \leq f(X) \quad \forall X, |\vec{PX}| < \epsilon.$$

A los máximos y mínimos de f se les conoce como *extremos relativos* de f .

7.12.1 Anulación del gradiente en los extremos

Si P es un extremo de un campo escalar f de $\mathbb{R}^n$, entonces P es un punto crítico de f , es decir,

$$\nabla f(P) = 0.$$

Tomando la trayectoria que pasa por P con la dirección y sentido del gradiente,

$$g(t) = P + t\nabla f(P),$$

la función $h = (f \circ g)(t)$ nunca decrece ya que

$$h'(t) = (f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = \nabla f(P) \cdot \nabla f(P) = |\nabla f(P)|^2 \geq 0.$$

y sólo se anula si $\nabla f(P) = 0$.

Así pues, si $\nabla f(P) \neq 0$, entonces P no puede ser un máximo ya que siguiendo la trayectoria de g desde P se encontrarían puntos en los que la imagen de f es mayor que en P . Del mismo modo, siguiendo la trayectoria opuesta a g se encontrarían puntos en los que la imagen de f es menor que la imagen en P , por lo que tampoco puede ser un mínimo.

Ejemplo 7.24. Para el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$, resulta evidente que sólo tiene un mínimo en el origen $(0, 0)$ ya que

$$f(0, 0) = 0 \leq f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En este punto se cumple, $\nabla f(0, 0) = 0$.

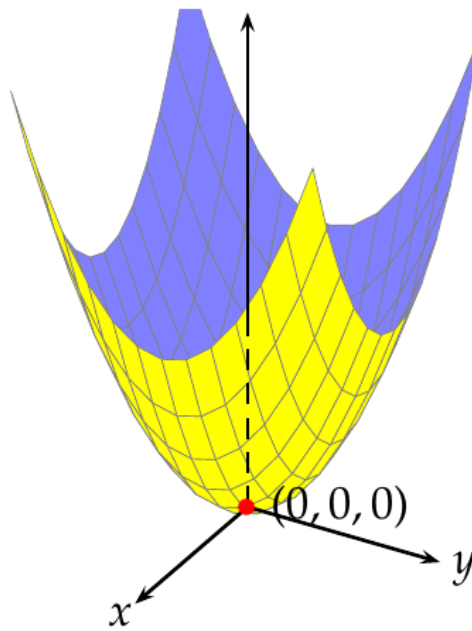


Figura 7.13: Gráfica del mínimo relativo de un paraboloide

7.12.2 Puntos de silla

No todos los puntos críticos son extremos. Si se considera, por ejemplo, el campo escalar $f(x, y) = x^2 - y^2$, su gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y),$$

que sólo se anula en el punto $(0, 0)$. Sin embargo, este punto no es un máximo relativo ya que los puntos $(x, 0)$ del eje X tienen imágenes $f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0, 0)$, y tampoco es un mínimo relativo ya que los puntos $(0, y)$ del eje Y tienen imágenes $f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0, 0)$. Este tipo de puntos que anulan el gradiente pero que no son extremos, se conocen como *puntos de silla*.

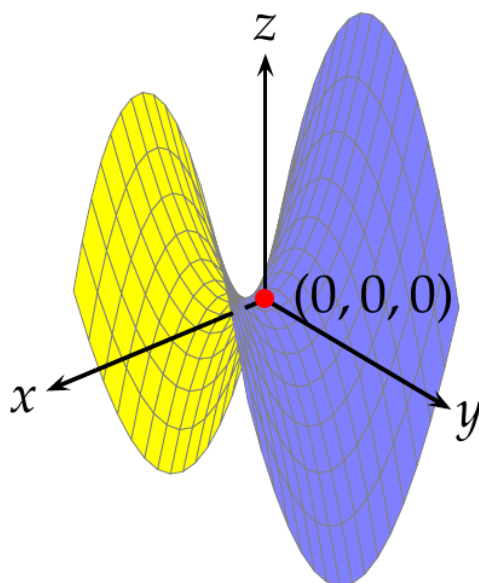


Figura 7.14: Gráfica de un punto de silla

7.12.3 Determinación de los extremos de un campo escalar

De la fórmula de Taylor de segundo grado para un campo escalar f en un punto P se deduce que

$$f(P + \mathbf{v}) - f(P) \approx \nabla f(P) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

De manera que si P es un punto crítico de f , como $\nabla f(P) = 0$, se tiene que

$$f(P + \mathbf{v}) - f(P) \approx \frac{1}{2} \nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Por tanto, el signo de $f(P + \mathbf{v}) - f(P)$ coincide con el signo del término cuadrático $\nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Se pueden dar cuatro posibilidades:

- Definido positivo: $\nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \ \forall \mathbf{v} \neq 0$.
- Definido negativo: $\nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} < 0 \ \forall \mathbf{v} \neq 0$.
- Indefinido: $\nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ para algún $\mathbf{v} \neq 0$ y $\nabla^2 f(P) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} < 0$ para algún $\mathbf{u} \neq 0$.
- Semidefinido: Cualquier otro caso distinto de los anteriores.

Así pues, dependiendo del signo de $\nabla^2 f(P) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, se tiene

Teorema 7.5 (Criterio de la matriz hessiana). *Dado un punto crítico P de un campo escalar f con matriz hessiana $\nabla^2 f(P)$, se cumple*

- Si $\nabla^2 f(P)$ es definido positivo entonces f tiene un mínimo relativo en P .
- Si $\nabla^2 f(P)$ es definido negativo entonces f tiene un máximo relativo en P .
- Si $\nabla^2 f(P)$ es indefinido entonces f tiene un punto de silla en P .

En el caso de que $\nabla^2 f(P)$ sea semidefinido, no se puede obtener ninguna conclusión y hay que recurrir a derivadas parciales de orden superior.

En el caso particular de un campo escalar de dos variables se tiene

Teorema 7.6 (Criterio del hessiano para campos escalares de dos variables). *Dado un punto crítico $P = (x_0, y_0)$ de un campo escalar $f(x, y)$ con matriz hessiana $\nabla^2 f(P)$ y hessiano $Hf(P)$, se cumple*

- Si $Hf(P) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en P .
- Si $Hf(P) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en P .
- Si $Hf(P) < 0$ entonces f tiene un punto de silla en P .

Ejemplo 7.25. Dado el campo escalar $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} - x + y$, se tiene que su gradiente vale

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - 1, -y^2 + 1),$$

que se anula en los puntos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$.

La matriz hessiana vale

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$$

y el hessiano vale

$$Hf(x, y) = -4xy.$$

Así pues, se tiene

- Punto $(1, 1)$: $Hf(1, 1) = -4 < 0 \Rightarrow$ Punto de silla.
- Punto $(1, -1)$: $Hf(1, -1) = 4 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo.
- Punto $(-1, 1)$: $Hf(-1, 1) = 4 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo.
- Punto $(-1, -1)$: $Hf(-1, -1) = -4 < 0 \Rightarrow$ Punto de silla.

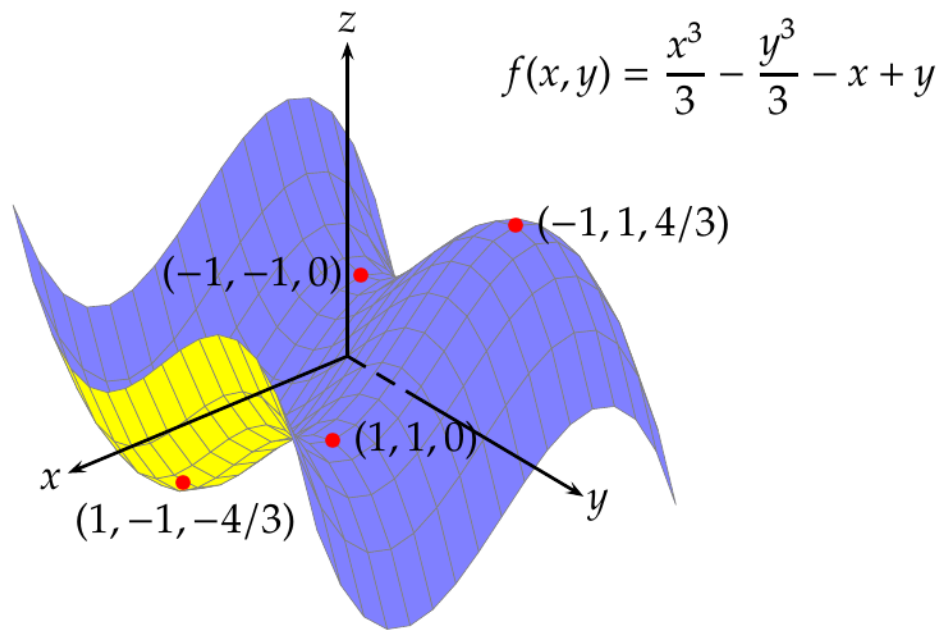


Figura 7.15: Gráfica de los extremos relativos y los puntos de silla de una función